LEERBOEK DER ALGEBRA,

DOOR

P. WIJDENES,
LEERAAR AAN DE 1e H. B. S. MET 3 J. C. TE AMSTERDAM

EN

Dr. D. DE LANGE,
LEERAAR AAN DE H. B. S. MET 5J. C. TE SEMARANG.

DEEL III.

VIJFDE DRUK.

P. NOORDHOFF — 1924 — GRONINGEN.

Gec. *f* 1.90.

LEERBOEK DER ALGEBRA,

DOOR

P. WIJDENES,

LEERAAR AAN DE 1e H. B. S. MET 3 J. C. TE AMSTERDAM

EN

DR. D. DE LANGE,

LEERAAR AAN DE H. B. S. MET 5J. C. TE SEMARANG.

DEEL III.

VIJFDE DRUK.

P. NOORDHOFF — 1924 — GRONINGEN.

BIJ DEN VIJFDEN DRUK.

Deze druk wijkt in de volgende kleinigheden af van den vorigen: 1) het weglaten van eenige vraagstukken uit § 43; 2) eveneens van de eerste 30 van de Eindexamens van H. B. S. met vijfjarigen cursus; 3) het toevoegen van een twaalftal vraagstukken aan de algemeene herhaling.

Leeraren, die naast dit boek de grafieken wenschen te behandelen, worden gewezen op het Grafiekenschrift en de wandplaten met grafieken, waarbij behooren de Verkleinde afdrukken voor het gebruik der leerlingen.

P. W.

INHOUD.

VERGELIJKINGEN VAN DEN TWEEDEN GRAAD MET TWEE EN MEER ONBEKENDEN.

§ 1. In het tweede deel hebben we opgemerkt, dat twee onbekenden bepaald worden door twee onderling onafhankelijke vergelijkingen en dat in het algemeen n onbekenden bepaald worden door n vergelijkingen; ook in het volgende zal men dus steeds evenveel vergelijkingen moeten aantreffen als onbekenden en steeds moet men het stelsel vergelijkingen vervangen door een gelijkwaardig stelsel.

Daar men volgens bepaling onder wortels slechts die waarden verstaat, die beide vergelijkingen tot identiteiten maken, zal men steeds een der onbekenden trachten te elimineeren; het hangt geheel van de gegeven vergelijkingen af, welke methode van eliminatie gebruikt wordt: gelijkstelling of substitutie, of optelling en aftrekking; bij een groot aantal moeten kunstgrepen worden toegepast; deze zullen we het laatst behandelen.

Het eenvoudigste stelsel vergelijkingen bestaat uit:

Een vergelijking van den 1en graad en een van den 2en graad.

A $$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 9 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (I) \\ x + 2y = 5 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (II) \end{cases}$$

Uit (II) volgt, dat men voor x kan substitueeren $5 - 2y$, zoodat A overgaat in:

B $\begin{cases} (5-2y)^2 + 2y^2 = 9 \quad (III) \\ x + 2y = 5 \quad . \; . \quad (II) \end{cases}$ of B$_1$ $\begin{cases} 3y^2 - 10y + 8 = 0 \quad (III) \\ x + 2y = 5 \quad . \; . \quad (II) \end{cases}$

Uit (III) volgt $y_1 = \frac{4}{3}$ en $y_2 = 2$; bij y_1 behoort volgens (II) $x_1 = 2\frac{1}{3}$ en bij y_2 behoort $x_2 = 1$.

De stellen wortels zijn dus $x_1 = 2\frac{1}{3}$, $y_1 = 1\frac{1}{3}$ en $x_2 = 1$, $y_2 = 2$. (Schrijf vooral niet $x = 2\frac{1}{3}$ of 1 en $y = 1\frac{1}{3}$ of 2).

Uit het bovenstaande leeren we: **Is de eene vergelijking van den 1sten graad, druk dan een onbekende uit in de andere en substitueer dit in de vergelijking van den 2en graad; een vierkantsvergelijking geeft dan de waarde van de overblijvende onbekende.**

Voorbeelden:

I. A $\begin{cases} 3x + 4y = 5 \dots\dots & \text{(I)} \\ 2x^2 - xy + y^2 = 22 \dots\dots & \text{(II)} \end{cases}$

Uit (I) volgt $x = \frac{5 - 4y}{3}$, dit in (II) geeft:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 5 \dots\dots & \text{(I)} \\ 2\left(\frac{5 - 4y}{3}\right)^2 - y\left(\frac{5 - 4y}{3}\right) + y^2 = 22 \dots\dots & \text{(III)} \end{cases}$$

of B_1 $\begin{cases} 3x + 4y = 5 \dots\dots & \text{(I)} \\ 53y^2 - 95y - 148 = 0 \dots\dots & \text{(III)} \end{cases}$

Uit (III) volgt $y_1 = -1$ en $y_2 = \frac{148}{53}$, waarbij men vindt $x_1 = 3$ en $x_2 = -\frac{109}{53}$.

De stellen wortels zijn dus $x_1 = 3$, $y_1 = -1$ en $x_2 = -\frac{109}{53}$ en $y_2 = \frac{148}{53}$.

II. A $\begin{cases} \frac{m}{x} + \frac{n}{y} = 2 \dots\dots & \text{(I)} \\ ny - mx = n^2 - m^2 \dots\dots & \text{(II} \end{cases}$

Uit (II) volgt $mx = ny - n^2 + m^2$ en $\frac{x}{m} = \frac{ny - n^2 + m^2}{m^2}$ en $\frac{m}{x} = \frac{m^2}{ny - n^2 + m^2}$; dit in (I) geeft het stelsel:

B $\begin{cases} \frac{m^2}{ny - n^2 + m^2} + \frac{n}{y} = 2 \dots\dots & \text{(III)} \\ ny - mx = n^2 - m^2 \dots\dots & \text{(II)} \end{cases}$

of B_1 $\begin{cases} 2ny^2 - y(3n^2 - m^2) + n^3 - m^2n = 0 \dots\dots & \text{(III)} \\ ny - mx = n^2 - m^2 \dots\dots & \text{(II)} \end{cases}$

Uit (III) volgt $y_1 = n$ en $y_2 = \frac{n^2 - m^2}{2n}$; de hierbij behoorende waarde voor x vindt men door substitutie in (II) nl. $x_1 = m$ en $x_2 = \frac{m^2 - n^2}{2m}$.

De stellen wortels zijn dus: $x_1 = m$, $y_1 = n$ en $x_2 = \frac{m^2 - n^2}{2m}$ en $y_2 = \frac{n^2 - m^2}{2n}$.

OPGAVEN.

§ 2. 1. $\begin{cases} 2x - y = 5. \\ x + 3y = 2xy. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x - 31 = 5y. \\ x^2 + 5xy + 25 = y^2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x + 2y = 5. \\ x^2 - 4xy + 5y^2 = 2. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 2x - 7y = 25. \\ 5x^2 + 4xy + 3y^2 = 23. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + y = 2. \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 6. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x + 2y = 7. \\ \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = 5. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x - y = 1. \\ \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6}. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 7x - 3y + 7 = 0. \\ \frac{5}{x} - \frac{14}{y} = 6. \end{cases}$

9. $\begin{cases} xy + 2x = 5. \\ 2xy - y = 3. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x^2 - y = 29. \\ x^2 + x + y = 49. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2 + 3x - 2y = 4. \\ 2x^2 - 5x + 3y + 2 = 0. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x - \frac{2y - x}{23 - x} = 20 - \frac{59 - 2x}{2} \\ x^2 + y^2 = 841. \end{cases}$

De volgende vergelijkingen kunnen door het stellen van nieuwe onbekenden volgens dezelfde methode opgelost worden:

13. $\begin{cases} \frac{x + y}{x - y} + \frac{x - y}{x + y} = \frac{10}{3}. \\ x^2 + y^2 = 20. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} \sqrt{\frac{3x}{x + y}} + \sqrt{\frac{x + y}{3x}} = 2. \\ x^2 - 3xy + 7y^2 + x + y = 26. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x + y} - \sqrt[3]{x - y}}{\sqrt[3]{x - y} + \sqrt[3]{x + y}} = 3. \\ x^2 + y^2 = 75. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x + y = 7x - 7y + 16. \\ (x + y)^2 - 7(x^2 - y^2) + 23(x - y)^2 = 167. \end{cases}$

§ 3. Zijn **beide vergelijkingen van den tweeden graad,** dan kan men in het algemeen geen stel wortels vinden, want

de eliminatie van een der onbekenden geeft een vierdemachts-vergelijking, b.v.

A $\begin{cases} x^2 + x + y = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{(I)} \\ x^2 + y^2 = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{(II)} \end{cases}$

Uit (I) volgt $y = 3 - x - x^2$, welke waarde gesubstitueerd in (II) geeft: $x^2 + (3 - x - x^2)^2 = 5$ of $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 6x + 4 = 0$; we krijgen dus:

B $\begin{cases} x^2 + x + y = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{(I)} \\ x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 6x + 4 = 0 \ldots\ldots\ldots & \text{(III)} \end{cases}$

Daar (III) in het algemeen niet op te lossen is, kan men geen stel waarden vinden voor x en y. Enkele bijzondere gevallen, waarbij het wel mogelijk is, zullen we behandelen.

I. **Beide vergelijkingen bevatten enkel termen van den tweeden graad:**

A $\begin{cases} x^2 + 3xy = 28 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{(I)} \\ xy + 4y^2 = 8 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{(II)} \end{cases}$

De eerste met 2 vermenigvuldigende, de tweede met 7 en dan aftrekkende vindt men:

$$2(x^2 + 3xy) - 7(xy + 4y^2) = 0 \text{ of } 2x^2 - xy - 28y^2 = 0,$$

waaruit men vindt $4x = y \pm \sqrt{y^2 + 224y^2} = y \pm 15y$ of wel $x = 4y$ en $x = -\frac{7}{2}y$; daardoor krijgen we nu de beide stelsels:

B$_1$ $\begin{cases} x = 4y \ldots\ldots & \text{(III)} \\ xy + 4y^2 = 8. \ldots & \text{(II)} \end{cases}$ B$_2$ $\begin{cases} x = -\frac{7}{2}y \ldots\ldots & \text{(IV)} \\ xy + 4y^2 = 8 \ldots & \text{(II)} \end{cases}$

Uit B$_1$ volgt: $\begin{cases} x_1 = 4, \\ y_1 = 1. \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -4, \\ y_2 = -1. \end{cases}$

Uit B$_2$: $\begin{cases} x_3 = -14, \\ y_3 = 4. \end{cases}$ $\begin{cases} x_4 = 14, \\ y_4 = -4. \end{cases}$

OPGAVEN.

§ 4. 1. $\begin{cases} x^2 + 3xy = 45. \\ y^2 - xy = 4. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x^2 - xy = 63. \\ y^2 + xy = 22. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 - 3xy = 10. \\ 4y^2 - xy = -1. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = -44. \\ xy + 3y^2 = 80. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2 + 3xy = 10. \\ 5xy - 2x^2 = 2. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x^2 - 7xy - 9y^2 = 9. \\ x^2 + 5xy + 11y^2 = 5. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2+5y^2=84. \\ 3x^2+11xy-y^2=84. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 2x^2-2xy+3y^2=18. \\ 3x^2-2y^2=19. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{xy}+\dfrac{3}{y^2}=3. \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{xy}+\dfrac{3}{y^2}=11. \end{cases}$ 10. $x^2+3xy=12-xy=6y^2-xy-x^2$.

11. $\begin{cases} (x^2+y^2):(x^2-y^2)=17:8. \\ 25y^2+9x^2=450. \end{cases}$

De volgende vergelijkingen kunnen weer door het stellen van nieuwe onbekenden als bovenstaande vraagstukken behandeld worden:

12. $\begin{cases} (x-1)^2+3(x-1)(y+7)=9(y+7)^2-191. \\ (x-1)^2+7(y+7)^2=179. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{x^4}{y^2}+\dfrac{y^4}{x^2}=585. \\ \dfrac{x^4}{y^2}-8xy+\dfrac{y^4}{x^2}=9. \end{cases}$

§ 5. Een of beide vergelijkingen zijn ontbindbaar.

A $\begin{cases} x^2-2xy+y^2=16 \quad \ldots \quad (I) \\ 3x^2-8y^2=76 \quad \ldots \quad (II) \end{cases}$

De eerste vergelijking is $(x-y)^2-4^2=0$ of $x-y+4=0$ en $x-y-4=0$. Het stelsel A gaat dus over in de beide volgende stelsels:

B$_1$ $\begin{cases} x-y+4=0 \quad . \; . \; (III) \\ 3x^2-8y^2=76 \quad . \; . \; (II) \end{cases}$

Uit (III) volgt $x=y-4$; dit in (II) geeft het stelsel:

C$_1$ $\begin{cases} x=y-4 \quad . \; . \; . \; . \; (III) \\ 5y^2+24y+28=0 \quad (V) \end{cases}$

Uit (III) en (V) volgt:

$\begin{cases} x_1=-6{,}8 \\ y_1=-2{,}8 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-6. \\ y_2=-2. \end{cases}$

B$_2$ $\begin{cases} x-y-4=0 \quad . \; . \; (IV) \\ 3x^2-8y^2=76 \quad . \; . \; (II) \end{cases}$

Uit (IV) volgt $x=y+4$; dit in (II) geeft het stelsel:

C$_2$ $\begin{cases} x=y+4 \quad . \; . \; . \; . \; (IV) \\ 5y^2-24y+28=0 \quad (VI) \end{cases}$

Uit (IV) en (VI) volgt:

$\begin{cases} x_3=6{,}8 \\ y_3=2{,}8 \end{cases}$ $\begin{cases} x_4=6. \\ y_4=2. \end{cases}$

De weg, dien we volgden, is deze: ontbind de vergelijking in twee andere van den eersten graad en beschouw elk van deze met de overgebleven vergelijking als een nieuw stelsel; zie verder § 1. Zijn beide vergelijkingen ontbindbaar, dan volgen uit het eene stelsel vier andere:

b.v. A $\begin{cases} 2x^2 - 7xy + 3y^2 - 8x + 4y = 0 \ldots\ldots\ldots (I) \\ x^2 - 2x - 25y^2 - 20y - 3 = 0 \ldots\ldots\ldots (II) \end{cases}$

Daar we in de vorige § geleerd hebben, dat substitutie ons voert tot een 4[e] machtsvergelijking, moeten we wel besluiten, dat het stelsel alleen oplosbaar is, als het eerste lid van een of beide vergelijkingen, op nul herleid, ontbindbaar is. Nu kunnen we voor (I) schrijven:

$2x^2 - x(7y + 8) + 3y^2 + 4y = 0.$

$4x = 7y + 8 \pm \sqrt{49y^2 + 112y + 64 - 24y^2 - 32y} = 7y + 8 \pm (5y + 8).$

$4x = 12y + 16$ of $2y$.

$x = 3y + 4$ of $\frac{1}{2}y$.

De ontbinding is dus $2(x - 3y - 4)(x - \frac{1}{2}y) = (x - 3y - 4)(2x - y)$.

Voor (II) kunnen we schrijven:

$x^2 - 2x - (25y^2 + 20y + 3) = 0.$

$x = 1 \pm \sqrt{1 + 25y^2 + 20y + 3} = 1 \pm (5y + 2).$

$x = 5y + 3$ en $-5y - 1$.

De ontbinding is dus $(x - 5y - 3)(x + 5y + 1) = 0$.

Het gegeven stelsel gaat dus over in:

A $\begin{cases} (x - 3y - 4)(2x - y) = 0 \ldots\ldots\ldots (I) \\ (x - 5y - 3)(x + 5y + 1) = 0 \ldots\ldots\ldots (II) \end{cases}$

Dit laat zich nu splitsen in:

$B_1 \begin{cases} x - 3y - 4 = 0. \\ x - 5y - 3 = 0. \end{cases}$ $\quad B_2 \begin{cases} x - 3y - 4 = 0. \\ x + 5y + 1 = 0. \end{cases}$

$B_3 \begin{cases} 2x - y = 0. \\ x - 5y - 3 = 0. \end{cases}$ $\quad B_4 \begin{cases} 2x - y = 0. \\ x + 5y + 1 = 0. \end{cases}$

De stellen wortels zijn dus:

$\begin{cases} x_1 = 5\frac{1}{2}. \\ y_1 = \frac{1}{2}. \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_2 = 2\frac{1}{8}. \\ y_2 = -\frac{5}{8}. \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_3 = -\frac{1}{3}. \\ y_3 = -\frac{2}{3}. \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_4 = -\frac{1}{11}. \\ y_4 = -\frac{2}{11}. \end{cases}$

OPGAVEN.

§ 6. 1. $\begin{cases} x^2 - 2xy = 0. \\ 4x^2 + 9y^2 = 225. \end{cases}$ $\quad$ 2. $\begin{cases} 2x^2 - 2xy = 0. \\ y^2 + 5xy = 34. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0. \\ 3x^2 + 4xy - 5y^2 = 18. \end{cases}$ $\quad$ 4. $\begin{cases} (x + 3)y = x + 3. \\ 2x^2 - 4xy + y^2 = 7. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2 + 9y^2 = 6xy + 9. \\ x^2 - 7xy + 10y^2 = -5. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 4xy. \\ x^2 + xy + y^2 + x + y = 5. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2 - 2x = y^2 - 1. \\ 3x^2 + 5y^2 - 2x - 2y = \frac{1}{2}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 4x^2 + 9 = y^2 + 12x. \\ x^2 + xy + y^2 - 10x - 10y = 21. \end{cases}$

9. $\begin{cases} y(y - 1) = x(x + 1). \\ x^2 + 9xy + 60x + y = 66. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 2x + 2y + 3. \\ 4x^2 + 4y = y^2 + 4. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 6x^2 + xy + 13x - 2y^2 + 11y = 5. \\ x^2 + y^2 = 9x + 635. \end{cases}$

12. $\begin{cases} a^2x^2 - abxy + b^2y^2 + 3c(ax - by) + 2c^2 = 0. \\ a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 + 3c(ax + by) - 10c^2 = 0. \end{cases}$

§ 7. Slechts weinig stelsels vergelijkingen kunnen op de reeds behandelde manieren opgelost worden; op de meeste moeten meer of minder voor de hand liggende **kunstgrepen** worden toegepast òf om beide onbekenden in eens op te lossen òf om één onbekende te elimineeren òf om een eenvoudiger stelsel met twee onbekenden te krijgen. We zullen veel voorbeelden geven, die echter niet toereikend zullen blijken om alle voorkomende gevallen volgens die modellen te behandelen.

EIGENSCHAPPEN VAN VIERKANTSVERGELIJKINGEN.

A $\begin{cases} x + y = 17 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (I) \\ \quad xy = 11 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (II) \end{cases}$

De gewone omslachtige oplossing is:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 289$$
$$4xy \qquad = 44$$
$$\overline{x^2 - 2xy + y^2 = 245}, \text{ waaruit } x - y = \pm 7\sqrt{5}.$$

Stelsel A kan dus vervangen worden door:

B₁ $\begin{cases} x + y = 17 \;\dots\; (I) \\ x - y = 7\sqrt{5} \;\dots\; (III) \end{cases}$ en B₂ $\begin{cases} x + y = 17 \;\dots\; (I) \\ x - y = -7\sqrt{5} \;.\; (IV) \end{cases}$

waaruit: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{17 + 7\sqrt{5}}{2} \\ y_1 = \dfrac{17 - 7\sqrt{5}}{2} \end{cases}$ en $\begin{cases} x_2 = \dfrac{17 - 7\sqrt{5}}{2}. \\ y_2 = \dfrac{17 + 7\sqrt{5}}{2}. \end{cases}$

Herinneren we ons echter, dat in de vierkantsvergelijking $x^2 + px + q = 0$ de coëfficiënt van de eerste macht der onbekende met tegengesteld teeken de som van de onbekende wortels is en dat de bekende term hun product is, dan zien we, dat x en y de wortels moeten voorstellen van de vierkantsvergelijking:

$$X^2 - 17X + 11 = 0, \text{ waaruit } X = \frac{17 \pm 7\sqrt{5}}{2};$$

men vindt dan onmiddellijk bovenstaande waarden.

Voorbeelden:

1. A $\begin{cases} x + y = a. \\ xy = c^2. \end{cases}$ Los op $X^2 - aX + c^2 = 0.$

$$X = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4c^2}}{2}.$$

Men vindt dus: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{a + \sqrt{a^2 - 4c^2}}{2}. \\ y_1 = \dfrac{a - \sqrt{a^2 - 4c^2}}{2}. \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = \dfrac{a - \sqrt{a^2 - 4c^2}}{2}. \\ y_2 = \dfrac{a + \sqrt{a^2 - 4c^2}}{2}. \end{cases}$

2. A $\begin{cases} x - y = 11 \\ \dfrac{6}{x} = \dfrac{y}{10} \end{cases}$ of A $\begin{cases} x + (-y) = 11. \\ x \times (-y) = -60. \end{cases}$

x en $-y$ zijn de wortels van de vergelijking:

$$X^2 - 11X - 60 = 0. \quad X = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 240}}{2} = \frac{11 \pm 19}{2} = 15 \text{ en } -4,$$

waaruit we vinden:

$\begin{cases} x_1 = 15 \\ -y_1 = -4. \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -4. \\ -y_2 = 15. \end{cases}$

3. A $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19, \\ xy = -6. \end{cases}$ of B $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19. \\ x^3 y^3 = -216. \end{cases}$

x^3 en y^3 zijn dus de wortels van de vergelijking:

$$X^2 - 19X - 216 = 0; \quad X = \frac{19 \pm \sqrt{361 + 864}}{2} = \frac{19 \pm 35}{2} = 27 \text{ en } -8,$$

waaruit:

$\begin{cases} x_1^3 = 27. \\ y_1^3 = -8. \end{cases}$ $\begin{cases} x_2^3 = -8. \\ y_2^3 = 27. \end{cases}$

$$x_1^3 - 27 = 0, \ (x_1 - 3)(x_1^2 + 3x_1 + 9) = 0, \ x_1 = \frac{-3 \pm 3\sqrt{-3}}{2}.$$

$$y_1^3 + 8 = 0, \ (y_1 + 2)(y_1^2 - 2y_1 + 4) = 0, \ y_1 = 1 \pm \sqrt{-3}.$$

Uit het eerste stelsel volgen dus drie waarden voor x_1 en ook drie voor y_1; deze moeten nu zoo twee aan twee verbonden worden, dat het het product — 6 wordt:

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \tfrac{3}{2}(-1+\sqrt{-3}) \\ y_2 = 1+\sqrt{-3} \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \tfrac{3}{2}(-1-\sqrt{-3}). \\ y_3 = 1-\sqrt{-3}. \end{cases}$$

Uit het andere stelsel volgen de andere waarden:

$$\begin{cases} x_4 = -3 \\ y_4 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_5 = 1+\sqrt{-3} \\ y_5 = \tfrac{3}{2}(-1+\sqrt{-3}) \end{cases} \quad \begin{cases} x_6 = 1-\sqrt{-3}. \\ y_6 = \tfrac{3}{2}(-1-\sqrt{-3}). \end{cases}$$

OPGAVEN.

§ 8. 1. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3. \\ \sqrt[3]{xy}=2. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x^2+y^2=17. \\ xy=-4. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{y}=16. \\ \sqrt[3]{xy}=30. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x^2-3y^2=97. \\ xy=10. \end{cases}$

5. $\begin{cases} (x^2-y^2)(x+y)=200. \\ x^2-y^2+x+y=30. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x+\sqrt{x}+y+\sqrt{y}=18. \\ (x+\sqrt{x})(y+\sqrt{y})=72. \end{cases}$

7. $\begin{cases} (x-3)^2+(y-3)^2=34. \\ xy-3(x+y)=6. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x+y=5. \\ 4xy=12-x^2y^2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x+y=-2a+2b+3c. \\ xy=-8a^2+22ab-15b^2-bc+2c^2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{1}{742xy}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}. \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{7326}. \end{cases}$ 11. $\begin{cases} \dfrac{12}{x}=\dfrac{y}{3}. \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=5. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{1}{2y}-\dfrac{1}{3x}=\dfrac{5}{6}. \\ xy+\sqrt{6xy}=1\tfrac{1}{6}. \end{cases}$

§ 9. Bij alle voorbeelden en vraagstukken hebben we kunnen opmerken, dat het aantal stellen wortels gelijk is aan het product der graden van de gegeven vergelijkingen; het bewijs dezer eigenschap kunnen we hier niet geven, maar toch is het noodig hierop acht te slaan, daar in het volgende herhaaldelijk kunstgrepen worden toegepast en men steeds moet opletten of het product

der graden bij elk volgend stelsel nog wel even hoog is als bij het gegevene; is het lager, dan kunnen wortels zijn verduisterd, is het hooger, dan kunnen wortels zijn ingevoerd.

Eenige kunstgrepen zullen we hier nog behandelen:

OPTELLEN OF AFTREKKEN.

Voorbeeld.

1. A $\begin{cases} x^2 + 3xy = 40 & \text{(I)} \\ 4y^2 + xy = 9 & \text{(II)} \end{cases}$

Telt men de overeenkomstige leden van beide vergelijkingen op, dan krijgt men $x^2 + 4xy + 4y^2 = 49$, waaruit $x + 2y = \pm 7$. We krijgen dus:

$B_1 \begin{cases} x^2 + 3xy = 40. \\ x + 2y = 7. \end{cases}$ $\quad$ $B_2 \begin{cases} x^2 + 3xy = 40. \\ x + 2y = -7. \end{cases}$

Deze kunnen opgelost worden, doordat in B_1 volgt $x = 7 - 2y$ en in B_2 $x = -7 - 2y$. Men vindt:

$\begin{cases} x_1 = 5 \\ y_1 = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_2 = 16 \\ y_2 = -4\frac{1}{2} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_3 = -5 \\ y_3 = -1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_4 = -16 \\ y_4 = 4\frac{1}{2}. \end{cases}$

2. A $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 13x. & \text{(I)} \\ x^2 - xy + y^2 = 7x. & \text{(II)} \end{cases}$

Het verschil van de beide eerste leden is $2xy$, van de tweede leden $6x$; dus is $2xy = 6x$, welke vergelijking ontbindbaar is in $x = 0$ en $y = 3$. We krijgen dus:

$B_1 \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 13x & \text{(I)} \\ x = 0 & \text{(III)} \end{cases}$ $\quad B_2 \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 13x & \text{(I)} \\ y = 3 & \text{(IV)} \end{cases}$

Hieruit volgt:

$C_1 \begin{cases} y^2 = 0 & \text{(V)} \\ x = 0 & \text{(III)} \end{cases}$ $\quad C_2 \begin{cases} x^2 - 10x + 9 = 0 & \text{(VI)} \\ y = 3 & \text{(IV)} \end{cases}$

We krijgen dus de volgende stellen wortels:

$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_2 = 0. \\ y_2 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_3 = 1 \\ y_3 = 3 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_4 = 9 \\ y_4 = 3. \end{cases}$

3. A $\begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{1}{3}xy = \frac{29}{36}a^2 & \text{(I)} \\ 12xy = 5a^2 & \text{(II)} \end{cases}$

Uit de gedaante van (I) zien we, dat, door $\frac{5}{3}xy$ af te trekken

en ook $2\frac{1}{3}xy$ bij te tellen, (I) in beide gevallen een volkomen vierkant wordt;

$$\frac{5}{3}xy = \frac{5}{3} \cdot \frac{5a^2}{12} = \frac{25a^2}{36} \text{ en } \frac{7}{3}xy = \frac{7}{3} \cdot \frac{5a^2}{12} = \frac{35a^2}{36}.$$

We krijgen dus:

$$B \begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy = \frac{1}{9}a^2 \quad \ldots\ldots & \text{(III)} \\ x^2 + y^2 + 2xy = \frac{16}{9}a^2 \quad \ldots\ldots & \text{(IV)} \end{cases}$$

Dit stelsel laat zich splitsen in de volgende vier stelsels:

$$C_1 \begin{cases} x - y = \frac{1}{3}a. \\ x + y = \frac{4}{3}a. \end{cases} \qquad C_2 \begin{cases} x - y = -\frac{1}{3}a. \\ x + y = \frac{4}{3}a. \end{cases}$$

$$C_3 \begin{cases} x - y = \frac{1}{3}a. \\ x + y = -\frac{4}{3}a. \end{cases} \qquad C_4 \begin{cases} x - y = -\frac{1}{3}a. \\ x + y = -\frac{4}{3}a. \end{cases}$$

Daaruit vinden we dan de volgende stellen wortels:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{6}a. \\ y_1 = \frac{1}{2}a. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}a. \\ y_2 = \frac{5}{6}a. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = -\frac{1}{2}a. \\ y_3 = -\frac{5}{6}a. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = -\frac{5}{6}a. \\ y_4 = -\frac{1}{2}a. \end{cases}$$

OPGAVEN.

§ 10. 1. $\begin{cases} 4x^2 - 3xy = 10. \\ y^2 - xy = 6. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 74. \\ xy = 35. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 + xy = -6. \\ xy + y^2 = 15. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x^2 - xy = a^2 + b^2. \\ y^2 - xy = -2ab. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 162. \\ x - y + x^2 - y^2 = 102. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7a^2 - 13ab + 7b^2. \\ x^2 - xy + y^2 = 3a^2 - 3ab + 3b^2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} xy^2 + x^2y = 15. \\ x^3 + y^3 = 19. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x + 6y + \dfrac{x}{y} = 16. \\ 3(x + y) + \dfrac{x}{y} = 23. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 3(x - y). \\ 2x^2 + xy - y^2 = 9(x - y). \end{cases}$

10. $\begin{cases} xy(x - y) = 12. \\ x^3 - y^3 = 63. \end{cases}$ 11. $\begin{cases} x^2 = 2y + 24. \\ y^2 = 2x + 24. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2 + y^2 = xy + 7. \\ x^2 - y^2 = xy - 1. \end{cases}$

§ 11. VERMENIGVULDIGING EN MACHTSVERHEFFING.

Beide bewerkingen: vermenigvuldigen der overeenkomstige leden van twee gegeven vergelijkingen en machtsverheffen van beide leden eener vergelijking moeten, waar het eenigszins kan, vermeden worden, daar er bijna altijd wortels worden ingevoerd. Heeft men toch het stelsel A $\begin{cases} P = Q \\ R = S \end{cases}$ (waarin P, Q, R en S alle vier vormen zijn, waarin de onbekenden voorkomen) en vormt men het stelsel B $\begin{cases} P = Q \\ PR = QS \end{cases}$, dan heeft men daarmee tevens de oplossing van het stelsel C $\begin{cases} P = 0 \\ Q = 0 \end{cases}$, welker wortels niet voldoen aan A, maar wel aan B; neemt men B_1 $\begin{cases} R = S \\ PR = QS \end{cases}$, dan vindt men tevens die van het stelsel C_1 $\begin{cases} R = 0 \\ S = 0 \end{cases}$; in beide gevallen worden dus wortels ingevoerd. **Is Q echter een bepaald getal, dan** kan aan C niet voldaan worden en stelsel B is gelijkwaardig met stelsel A. Als dit dus het geval is, dan **kan men zonder bezwaar vermenigvuldigen.**

Voorbeeld:

$$\text{A} \begin{cases} x^2y = a^3 - a^2. \\ xy^2 = a^3 - 2a^2 + a. \end{cases}$$

Hieruit volgt door vermenigvuldiging:

$$\text{B} \begin{cases} x^2y = a^2(a-1). \\ x^3y^3 = a^3(a-1)^3. \end{cases}$$

Stelt men verder $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3} = k$ en $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3} = k^2$, dan heeft men op te lossen:

$$C_1 \begin{cases} x^2y = a^2(a-1) \\ xy = a(a-1) \end{cases} \quad C_2 \begin{cases} x^2y = a^2(a-1) \\ xy = a(a-1)k \end{cases} \quad C_3 \begin{cases} x^2y = a^2(a-1) \\ xy = a(a-1)k^2. \end{cases}$$

Hieruit vindt men:

$$\begin{cases} x_1 = a \\ y_1 = a-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = ak^2 \\ y_2 = (a-1)k^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = ak \\ y_3 = (a-1)k. \end{cases}$$

Heeft men A $\begin{cases} P = Q \\ R = S \end{cases}$ en blijkt het noodzakelijk, dat men vormt

B $\begin{cases} P^2 = Q^2 \\ R = S \end{cases}$, dan geeft de oplossing hiervan tevens die van het stelsel $A_1 \begin{cases} P = -Q \\ R = S \end{cases}$;

vormt men B $\begin{cases} P^3 = Q^3 \\ R = S \end{cases}$, dan geeft de oplossing tevens die van de stelsels $A_1 \begin{cases} P = kQ \\ R = S \end{cases}$ en $A_2 \begin{cases} P = k^2Q \\ R = S \end{cases}$, waarin k en k^2 de imaginaire derdewortels uit 1 zijn.

Men zal dus wel doen eerst alle andere manieren te beproeven, voor men kwadrateert en is het toch noodig gebleken, dan de wortels door substitutie te onderzoeken.

Voorbeeld:

$$A \begin{cases} (x+y)\,xy = 70 \\ (x^2+y^2)\,x^2y^2 = 2900. \end{cases}$$

Dit stelsel gaat door kwadrateering van beide leden der eerste vergelijking over in:

$$B \begin{cases} (x^2+y^2+2xy)\,x^2y^2 = 4900 \\ (x^2+y^2)\,x^2y^2 = 2900. \end{cases}$$

Hieruit volgt door aftrekking:

$$C \begin{cases} x^3y^3 = 1000 \\ (x+y)\,xy = 70. \end{cases}$$

Dit stelsel is nu te ontbinden in:

$$D_1 \begin{cases} xy = 10 \\ (x+y)\,xy = 70 \end{cases} \quad D_2 \begin{cases} xy = 10k \\ (x+y)\,xy = 70 \end{cases} \quad D_3 \begin{cases} xy = 10k^2 \\ (x+y)\,xy = 70, \end{cases}$$

waarin 1, k en k^2 de drie derdewortels zijn uit 1.

Deze stelsels gaan over in:

$$E_1 \begin{cases} xy = 10 \\ x+y = 7 \end{cases} \quad E_2 \begin{cases} xy = 10k \\ x+y = 7k^2 \end{cases} \quad E_3 \begin{cases} xy = 10k^2 \\ x+y = 7k. \end{cases}$$

Men vindt de volgende stellen wortels:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 5 \\ y_2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 2k^2 \\ y_3 = 5k^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = 5k^2 \\ y_4 = 2k^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_5 = 2k \\ y_5 = 5k \end{cases} \quad \begin{cases} x_6 = 5k \\ y_6 = 2k. \end{cases}$$

OPGAVEN.

§ 12. 1. $\begin{cases} xy = 16 & (a^2) \\ yz = 4 & (b^2) \\ zx = 9 & (c^2). \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x^2yz = 6 \\ y^2zx = 12 \\ z^2xy = 18. \end{cases}$

3. $\begin{cases} (x+y)(x+z)=2 \\ (y+z)(x+y)=3 \\ (z+x)(z+y)=6. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^m y^n = (1\frac{1}{2})^{m-n} \\ x^n y^m = (\frac{2}{3})^{m-n}. \end{cases}$

5. $\begin{cases} xyz = 105 \\ 35x = 3yz \\ 7xy = 15z. \end{cases}$

6. $\begin{cases} xy : z = 8 \\ xz : y = 18 \\ yz : x = 4\frac{1}{2}. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + y = 2a \\ x^2 + y^2 = 2a^2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} bx + ay = a^2 + b^2 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{b^2}{a^2} + \dfrac{a^2}{b^2}. \end{cases}$

9. $\begin{cases} xy = x - y \\ 25x^2y^2 = x^2 + y^2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2}. \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{5}{36}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x\sqrt{y} + y = 40 \\ x^2y + y^2 = 1312. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2 + \dfrac{x^4}{y^2} + y^2 = 21 \\ x + \dfrac{x^2}{y} + y = 7. \end{cases}$

§ 13. DEELEN EN WORTELTREKKEN.

Heeft men een stelsel A $\begin{cases} PR = QS \\ P = Q \end{cases}$ en vormt men door deeling van de overeenkomstige leden stelsel B $\begin{cases} R = S \\ P = Q \end{cases}$, dan worden blijkbaar wortels verduisterd nl. die, welke voldoen aan het stelsel C $\begin{cases} P = 0 \\ Q = 0 \end{cases}$. Deze moeten dus nog toegevoegd worden aan de wortels, welke men uit B vindt; het eenvoudigst is echter deze overwegingen als volgt te vermijden:

Uit A $\begin{cases} PR = QS \\ P = Q \end{cases}$ volgt B $\begin{cases} QR = QS \\ P = Q \end{cases}$, welk stelsel zich laat splitsen in $C_1 \begin{cases} P = Q \\ Q = 0 \end{cases}$ en $C_2 \begin{cases} R = S \\ P = Q \end{cases}$. Nu zal dit enkel het geval zijn, als P en Q beide vormen zijn met de onbekende; **is Q een bepaald getal, dan** kan aan C_1 niet voldaan worden en is C_2 (of B) gelijkwaardig met stelsel A; in dat geval **kan men**

zonder bezwaar deelen. Van beide geven we een voorbeeld.

1. A $\begin{cases}(4x^4 - 4y^4)(x^2 - y^2) = 45x^2y^2 \\ (2x^2 + 2y^2)(x + y) = 15xy.\end{cases}$

Ontbind het eerste lid van de eerste verg. in $(2x^2 + 2y^2)(x + y) \times (2x^2 - 2y^2)(x - y)$ en vervang $(2x^2 + 2y^2)(x + y)$ door $15xy$, dan ontstaat het stelsel:

B $\begin{cases}(2x^2 - 2y^2)(x - y) \,.\, 15xy = 45x^2y^2 \\ (2x^2 + 2y^2)(x + y) = 15xy.\end{cases}$

Dit stelsel laat zich splitsen in:

C_1 $\begin{cases}xy = 0 \\ (2x^2 + 2y^2)(x + y) = 15xy = 0.\end{cases}$

en C_2 $\begin{cases}(2x^2 - 2y^2)(x - y) = 3xy \\ (2x^2 + 2y^2)(x + y) = 15xy.\end{cases}$

Hiervan laat C_1 zich weer splitsen in:

$D_1 \begin{cases}x = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 = 0\end{cases}$ $D_2 \begin{cases}y = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 = 0\end{cases}$ $D_3 \begin{cases}x = 0 \\ x + y = 0\end{cases}$ $D_4 \begin{cases}y = 0 \\ x + y = 0\end{cases}$,

die allen tot wortels hebben $x = 0$ en $y = 0$.

Het stelsel C_2 laat zich herleiden tot C_2' $\begin{cases}2(x - y)^2(x + y) = 3(xy) \\ 2(x^2 + y^2)(x + y) = 15(xy)\end{cases}$,

zoodat men vindt $\dfrac{(x - y)^2}{x^2 + y^2} = \dfrac{1}{5}$, waaruit volgt $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$,

waardoor het stelsel overgaat in E $\begin{cases}2(x - y)^2(x + y) = 3xy \\ 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0\end{cases}$, dat

zich weer laat splitsen in F_1 $\begin{cases}2(x - y)^2(x + y) = 3xy \\ x = 2y\end{cases}$ en

F_2 $\begin{cases}2(x - y)^2(x + y) = 3xy \\ x = \frac{1}{2}y\end{cases}$.

Hiervan laat F_1 zich weer ontbinden in de drie vergelijkingen:

G_1 $\begin{cases}y = 0 \\ x = 2y\end{cases}$ G_2 $\begin{cases}y = 8 \\ x = 2y\end{cases}$ G_3 $\begin{cases}y = 1 \\ x = 2y\end{cases}$

waaruit weer volgt $x = 0$ en $y = 0$, alsmede $x = 2$, $y = 1$.

Uit F_2 volgen ook weer drie vergelijkingen, waaruit men alleen $x = 1$, $y = 2$ verkrijgt als stel wortels, dat van 0 verschilt.

2. A $\begin{cases}x^4 + x^2y^2 + y^4 = 1281 \\ x^2 - xy + y^2 = 61.\end{cases}$

Ontbindt men het eerste lid van de eerste vergelijking in factoren

nl. in $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$ en zet men voor x^2-xy+y^2 de waarde 61, dan komt er:

$$\text{B}\ \begin{cases} x^2+xy+y^2=21 \\ x^2-xy+y^2=61. \end{cases}$$

Door aftrekking vindt men $xy=-20$; het stelsel gaat dus over in:

$$\begin{cases} x^2+2xy+y^2=1 \\ x^2-2xy+y^2=81 \end{cases}$$

dat zich laat splitsen in:

$$\text{D}_1 \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=9 \end{cases} \quad \text{D}_2 \begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=9 \end{cases} \quad \text{D}_3 \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=-9 \end{cases} \quad \text{D}_4 \begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=-9, \end{cases}$$

waaruit men gemakkelijk de volgende stellen wortels vindt:

$$\begin{cases} x_1=5 \\ y_1=-4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=4 \\ y_2=-5 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3=-4 \\ y_3=5 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4=-5 \\ y_4=4. \end{cases}$$

Heeft men een stelsel $\text{A} \begin{cases} \text{P}^2=\text{Q}^2 \\ \text{R}=\text{S} \end{cases}$ en gaat men **worteltrekken**. dan heeft men hierbij slechts te bedenken, dat A zoowel overgaat in:

$$\text{B}_1 \begin{cases} \text{P}=\text{Q} \\ \text{R}=\text{S} \end{cases} \quad \text{als in } \text{B}_2 \begin{cases} \text{P}=-\text{Q} \\ \text{R}=\text{S}. \end{cases}$$

Evenzoo bij het trekken van den derden wortel:

$$\text{A} \begin{cases} \text{P}^3=\text{Q}^3 \\ \text{R}=\text{S} \end{cases} \text{ gaat over in } \text{B}_1 \begin{cases} \text{P}=\text{Q} \\ \text{R}=\text{S}, \end{cases}$$

$$\text{B}_2 \begin{cases} \text{P}=k\text{Q} \\ \text{R}=\text{S} \end{cases} \quad \text{en } \text{B}_3 \begin{cases} \text{P}=k^2\text{Q} \\ \text{R}=\text{S}, \end{cases}$$

waarin weer k en k^2 de beide onbestaanbare derdewortels uit 1 beteekenen. Laat men deze weg, dan worden er blijkbaar wortels verduisterd.

Voorbeeld:

$$\text{A} \begin{cases} x^3+1=81(y^2+y) \\ x^2+x=9(y^3+1). \end{cases}$$

Vermenigvuldigt men beide leden van de tweede vergelijking met 3 en telt men ze daarna bij de overeenkomstige leden van de eerste op, dan krijgt men het volgende stelsel:

$$\text{A} \begin{cases} x^2+x=9(y^3+1) \\ (x+1)^3=27(y+1)^3. \end{cases}$$

Dit laat zich ontbinden in:

$$C_1 \begin{cases} x^2+x=9(y^3+1) \\ x+1=3(y+1) \end{cases} \quad C_2 \begin{cases} x^2+x=9(y^3+1) \\ x+1=3(y+1)k \end{cases} \quad C_3 \begin{cases} x^2+x=9(y^3+1) \\ x+1=3(y+1)k^2. \end{cases}$$

Op C_1 kunnen we het pas geleerde van de deeling toepassen:

$$C_1 \begin{cases} x\,.\,3(y+1)=9(y+1)(y^2-y+1) \\ x+1=3(y+1). \end{cases}$$

Deze laatste laat zich weer splitsen in:

$$D_1 \begin{cases} y+1=0 \\ x+1=3(y+1)=0 \end{cases} \quad D_2 \begin{cases} x=3(y^2-y+1) \\ x+1=3(y+1) \end{cases} \quad \text{of} \begin{cases} x=3y^2-3y+3 \\ x=3y+2. \end{cases}$$

Uit deze vergelijkingen vindt men:

$$\begin{cases} x_1=-1 \\ x_1=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=5+\sqrt{6} \\ y_2=1+\tfrac{1}{3}\sqrt{6} \end{cases} \quad \begin{cases} x_3=5-\sqrt{6} \\ y_3=1-\tfrac{1}{3}\sqrt{6}. \end{cases}$$

Gewoonlijk zet men de bewerkingen met de complexe getallen niet voort, zoodat het vraagstuk hiermee af is.

OPGAVEN.

§ 14.

1. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=9. \\ x^4+x^2y^2+y^4=243. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^3+1=9y. \\ x^2+x=6y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x-2y=12. \\ 9x^2-4y^2=576. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^4+4x^2y^2+16y^4=3888. \\ x^2+2xy+4y^2=36. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=\tfrac{21}{10}. \\ y+\dfrac{1}{x}=\tfrac{7}{3}. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x(x+y+z)=24. \\ y(x+y+z)=48. \\ z(x+y+z)=72. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2y+xy^2=240. \\ x^3+y^3=280. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^3+y^3=335. \\ xy^2-x^2y=-70. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x^2+xy=7. \\ 3xy+y^2=18. \end{cases}$

10. $\begin{cases} y^2(y+x)=112. \\ x^2(y+x)=63. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2y+xy^2=180. \\ x^2y^2=400. \end{cases}$

12. $\begin{cases} xy=48. \\ xz=72. \\ yz=96. \end{cases}$

§ 15. STELLEN VAN NIEUWE ONBEKENDEN.

Hiervan willen we een paar voorbeelden geven; het eerste, dat dient om den opgegeven vorm korter op te schrijven en dus het overzicht te vergemakkelijken, het tweede, dat zal dienen om door handig

stellen de opgegeven vergelijking belangrijk te vereenvoudigen:

1. A $\begin{cases}(x+1)^2+(x+1)(y+2)+(y+2)^2=133\\(x+1)+\sqrt{(x+1)(y+2)}+(y+2)=19.\end{cases}$

Stel $x+1=p^2$ en $y+2=q^2$, dan krijgen we:

$$A' \begin{cases}p^4+p^2q^2+q^4=133\\p^2+pq+q^2=19.\end{cases}$$

Door deeling volgt het stelsel:

$$B \begin{cases}p^2-pq+q^2=7\\p^2+pq+q^2=19.\end{cases}$$

Door aftrekking vindt men $pq=6$; pq aftrekkende van beide leden der 1e B-vergelijking en optellende bij beide leden der 2e B-vergelijking krijgt men:

$$C \begin{cases}p^2-2pq+q^2=1\\p^2+2pq+q^2=25,\end{cases}$$

welk stelsel zich laat splitsen in:

$$D_1 \begin{cases}p-q=1\\p+q=5\end{cases} \quad D_2 \begin{cases}p-q=1\\p+q=-5\end{cases} \quad D_3 \begin{cases}p-q=-1\\p+q=5\end{cases} \quad D_4 \begin{cases}p-q=-1.\\p+q=-5.\end{cases}$$

Men vindt nu:

$$\begin{cases}p_1=3\\q_1=2\end{cases} \quad \begin{cases}p_2=-2\\q_2=-3\end{cases} \quad \begin{cases}p_3=2\\q_3=3\end{cases} \quad \begin{cases}p_4=-3.\\q_4=-2.\end{cases}$$

Hieruit vindt men:

$$\begin{cases}x_1=p_1^2-1=p_4^2-1=8\\y_1=q_1^2-2=q_4^2-2=2\end{cases} \text{ en } \begin{cases}x_2=p_2^2-1=p_3^2-1=3.\\y_2=q_2^2-2=q_3^2-2=7.\end{cases}$$

2. A $\begin{cases}x^5-y^5=242.\\x-y=2.\end{cases}$

Stel hierbij $x=z+1$ en $y=z-1$, omdat de 5e machten en 3e machten van z daardoor zullen wegvallen. Men krijgt nl. bij substitutie in de 1e vergelijking:

$$(z+1)^5-(z-1)^5=z^5+5z^4+10z^3+10z^2+5z+1+$$
$$-(z^5-5z^4+10z^3-10z^2+5z-1)=10z^4+20z^2+2=242.$$

Hieruit vindt men $z^4+2z^2-24=0$, waaruit $z^2=4$ en $z^2=-6$; $z_1=2$; $z_2=-2$; $z_3=i\sqrt{6}$; $z_4=-i\sqrt{6}$. De gevraagde wortels zijn dus:

$$\begin{cases}x_1=3\\y_1=1\end{cases} \quad \begin{cases}x_2=-1\\y_2=-3\end{cases} \quad \begin{cases}x_3=1+i\sqrt{6}\\y_3=-1+i\sqrt{6}\end{cases} \quad \begin{cases}x_4=1-i\sqrt{6}.\\y_4=-1-i\sqrt{6}.\end{cases}$$

Deze kunstgreep gebruikt men voor lagere machten.

OPGAVEN.

§ 16. 1. $\begin{cases} x-y=2. \\ x^3-y^3=98. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x+y=7. \\ x^3+y^3=91. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+y=1. \\ x^4+y^4=97. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x-y=2. \\ x^4+y^4=272. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x-y=\frac{1}{2}. \\ x^5-y^5=\frac{211}{32}. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} (x^2+y^2)(x^3+y^3)=45. \\ x+y=3. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+y=2. \\ 13(x^5+y^5)=121(x^3+y^3). \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x+y=4. \\ 41(x^5+y^5)=122(x^4+y^4). \end{cases}$

9. $\begin{cases} x-y=1. \\ x^{1/3}-y^{1/3}=1. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x^{1/4}+y^{1/5}=6. \\ x^{3/4}+y^{3/5}=126. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}=91. \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=7. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} 16x^4+81y^4=10657. \\ 2x-3y=-1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x^5-32y^5=211. \\ x-2y=1. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} (x-7)^4+(y-3)^4=257 \\ x-y+1=0. \end{cases}$

OVERZICHT.

§ 17. A. **Methodisch.**

I. $\begin{cases} px+qy=r \\ ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \end{cases}$ **zie § 1; substitutie.**

II. $\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2=r \\ dx^2+exy+fy^2=s \end{cases}$ **zie § 3; werk de bekende termen weg.**

III. $\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \\ a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x+e_1y+f_1=0 \end{cases}$
zie § 5; een der vergelijkingen is ontbindbaar.

IV. $\begin{cases} px+qy=r \\ px\times qy=s \end{cases}$ **zie § 7; wortels vierkantsvergelijking.**

V. $\begin{cases} x^a+y^a=p; \quad a\leqq 5 \\ x+y=2q \end{cases}$ **zie § 15; stel** $\begin{matrix} x=q+z \\ y=q-z \end{matrix}$

B. **Probeeren.**

Is het stelsel vergelijkingen zoodanig, dat het tot geen der vijf genoemde groepen gebracht kan worden, ook niet bij het aannemen van nieuwe onbekenden, probeer dan of er door toepassing van de hoofdbewerkingen: optelling, aftrekking, vermenigvuldiging, deeling, machtsverheffing of worteltrekking een eenvoudiger stelsel wil komen.

Daar er voor 3 vergelijkingen met 3 onbekenden en nog sterker voor n vergelijkingen met even zooveel onbekenden geen methodische oplossingen bestaan, hebben we deze hier niet behandeld; wel geven we eenige vraagstukken met de opmerking er bij, dat de substitutie zeer veel wordt toegepast.

§ 18. GEMENGDE OPGAVEN.

1. $\begin{cases} x - y = 9. \\ x^2 + y^2 = 125. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = 5. \\ x - y = 3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 8xy - 13y^2 = 3. \\ 13x^2 - 21xy = 10. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 243. \\ x^2 - xy + y^2 = 9. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2 + y^2 = p^2 - 2pq + 2q^2. \\ xy = pq - q^2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{x^2yz}{3} = xyz^2 = 6. \\ \dfrac{xy^2z}{2} = xyz^2 = 6. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2 - 9y^2 = 64. \\ xy + 3y^2 = 32. \end{cases}$

8. $\begin{cases} (x + y)^3 + (x - y)^3 = 730. \\ xy^2 = 80. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 8xy = 15\,(x + y) & \text{(Deel door } xy). \\ 7yz = 12\,(y + z) & (\;\text{,,}\quad\text{,,}\;\; yz). \\ 9zx = 20\,(z + x) & (\;\text{,,}\quad\text{,,}\;\; xz). \end{cases}$

10. $\begin{cases} (x + 5)^2 + (y - 6)^2 = 2\,(xy - 24). \\ y - x = 1. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x + \sqrt{xy} + y = 19. \\ x^2 + xy + y^2 = 133. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 152. \\ x^2y + xy^2 = 120. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x^2 - xy = 8x + 3. \\ xy - y^2 = 8y - 6. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dfrac{x^{1\frac{1}{2}}}{\sqrt{y}} + \dfrac{y^{1\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}} = 16^1/_6. \\ x - y = 5. \end{cases}$

15. $\begin{cases} y\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{xy} + \dfrac{x}{y} = 13. \\ y\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{xy} - \dfrac{x}{y} = 12. \end{cases}$

16. $\left.\begin{cases} x(y + z - x) = 39 - 2x^2. \\ y(x + z - y) = 52 - 2y^2. \\ z(x + y - z) = 78 - 2z^2. \end{cases}\right\}$ optellen.

17. $\begin{cases} 2x^2 - 9xy + 9y^2 = 5. \\ 4x^2 - 10xy + 11y^2 = 35. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 9x^2 - 4y^2 = 576. \\ 2y - 3x = -12. \end{cases}$

19. $\begin{cases} xy + \dfrac{x}{y} = 10. \\ xy^2 - x = 6y. \end{cases}$

20. $\begin{cases} y + z = 3xyz. \\ z + x = 2xyz. \\ x + y = 1\tfrac{1}{2}xyz. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y = 3. \\ y(x - y + 1) + x(x - y - 1) = 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dfrac{x^3}{y} = 108 - x^4. \\ \dfrac{y^3}{x} = \tfrac{4}{3} - y^4. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 5 = yz + \dfrac{y + z}{x}. \\ 3 = zx + \dfrac{z + x}{y}. \\ 1 = xy + \dfrac{x + y}{z}. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x^3 - y^3 = 875. \\ x^2 + xy + y^2 = 175. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 127. \\ x^2y^2 + xy = 1806. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x - y = \sqrt{x} + \sqrt{y}. \\ x^{1\frac{1}{2}} - y^{1\frac{1}{2}} = 61. \end{cases}$

27. $\begin{cases} (x^2 - xy + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 65. \\ (x^2 + xy + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 185. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x^4 - x^2y^2 + y^4 = 117. \\ x^2 + xy\sqrt{3} + y^2 = 39. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x^2 + xy = 3y^2 - xy. \\ 4x^2 + 5y^2 = 369. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 5y = 367. \\ 6xy - 12y - 9y^2 + 4x - x^2 = -45. \end{cases}$

31. $\begin{cases} x + y - 2z = -9 \\ 3x + 2y + z = 9 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 30. \end{cases}$ Druk x en y uit in z.

32. $\begin{cases} xyz = 105 \\ xyv = 135 \\ xzv = 189 \\ yzv = 315 \end{cases}$

33. $\begin{cases} xy + 3x + 4y = 87. & \text{Druk } x \text{ in } y \text{ uit.} \\ yz + 4y + 3z = 131. & \quad ,, \quad z \;,, \;,, \;,, \\ xz + 4x + 4z = 101. \end{cases}$

34. $\begin{cases} x^2(y+1) + y^2(x+1) = 109. \\ xy = 12. \end{cases}$

35. $\begin{cases} x^2 - xy + 3y = 11. \\ y^2 - xy - 3x = -1. \end{cases}$

36. $\begin{cases} x^2 + x = 6y. \\ x^3 + x = 10y. \end{cases}$

37. $\begin{cases} x + y = 3. \\ x^3 + y^3 = 9(x - y). \end{cases}$

38. $\begin{cases} x^3 + xy^2 = a^2y. \\ x^2y + y^3 = b^2x. \end{cases}$

39. $\begin{cases} x + y + z = 20. \\ x(y + z) = 75. \\ yz = 56. \end{cases}$

40. $\begin{cases} xy + 3xz - 5yz = 37. \\ 2xy - 6xz - 7yz = 50. \\ 5xy - 13xz - 20yz = 121. \end{cases}$

---

41. $x - y = 2z.$

$x^2 + y^2 + z^2 - \sqrt{xy + yz + zx} = 21 - \sqrt{14}.$

42. $\sqrt[y]{a^x} \cdot \sqrt[x]{a^y} = \sqrt[6]{a^{13}}.$

$(a^x)^x = a^{13} : (a^y)^y.$

43. $\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y} = \dfrac{x+3}{y+3} = \dfrac{x+y}{xy}.$

44. $ax^{-1} + b^{-1}y = 2; \quad xy - ab = bx - ay.$

45. $\dfrac{y}{x^2 - 3} = \dfrac{x}{3 - y^2} = \dfrac{7}{x^3 - y^3}.$

46. $\begin{cases} (a^{x+2})^{y-2} = \left(\dfrac{1}{a^{-2}}\right)^{-4}. \\ \dfrac{a^{3x-4}}{a^{5y-3}} = \dfrac{a^{x-7}}{a^{3y-10}}. \end{cases}$

47. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 246. \\ x + y + z = 16. \\ x(y + z) = 60. \end{cases}$

48. $\begin{cases} y + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{42}{x}. \\ \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x}{2\sqrt{y}} = \dfrac{54}{y}. \end{cases}$

49. $\begin{cases} x^{2/3} + \dfrac{x^{1/3}}{y^{-1}} = 15. \\ \left(\dfrac{1}{y^{-1/2}}\right)^2 (x^{1/3} + y) = 10. \end{cases}$

50. $$\begin{cases} (x+2y)^{1/2} \times (x-1)^{-1/2} = \dfrac{6-2\sqrt{5}}{\sqrt{14-6\sqrt{5}}}. \\ (x-1)^{1/2} = 1 - \sqrt{(x+2y)}. \end{cases}$$

TOEPASSINGEN.

§ 19. 1. De som van twee getallen is 52 en de wortel uit hun product is 24. Welke getallen zijn dat?

2. Verdeel 20 in twee deelen zoodanig, dat het vierkant van hun product gelijk is aan 9216.

3. Van welke twee getallen, wier som a is, is de som der omgekeerden b?

4. De som der derdemachten van twee getallen is 35 en de som der negende machten 20195. Welke getallen zijn dat?

5. Zoek twee getallen, wier som en wier product beide gelijk zijn aan het verschil hunner kwadraten.

6. Zoek 3 getallen zóódanig, dat de som van elk paar het omgekeerde is van het derde getal.

7. Als men den teller van een breuk vermeerdert met 2, en de nieuwe breuk optelt bij de gegevene, dan verkrijgt men $1\frac{2}{3}$; vermeerdert men den noemer met 2 en telt men deze breuk bij de gegevene, dan komt er $2\frac{1}{60}$. Welke breuk was dat?

8. Een ladder reikt juist tot den bovenkant van een venster; laat men hem op hetzelfde punt op den grond staan en zet men hem naar de overzijde der straat tegen een huis, dan reikt hij ook daar tot den bovenkant van een venster; als beide standen een rechten hoek vormen en de bovenkanten der vensters opv. 8,10 M en 10,80 M hoog zijn, hoe lang is dan de ladder en hoe breed is de straat?

9. A heeft *f* 13000, die hij in twee deelen verdeelt en uitzet tegen verschillend percent, echter zoodanig, dat de renten van beide gelijk zijn. Stond het 1^e^ uit tegen het percent van het 2^e^, dan bracht dit op *f* 360 en stond het 2e uit tegen het percent van het 1e, dan bracht dit op *f* 490. Bepaal de percenten.

10. Een spoortrein, een diligence en een bode leggen dagelijks den weg af van A naar B. De diligence besteedt daartoe twee uur minder dan de bode en twee uur meer dan de trein. Indien men nu weet, dat de trein in één kwartier $1\frac{1}{2}$ KM meer aflegt dan de bode in 1 uur en deze laatste in 3 uren 2 KM minder aflegt dan de diligence in 2 uur, vraagt men naar den afstand van A tot B en de tijden, waarin de afstand wordt afgelegd.

11. Bereken de zijden van een rechthoekigen driehoek, als de omtrek 30 dM en de oppervlakte 30 dM^2 is.

12. $f\,3000$ uitgezet à $x\,\%$ en $f\,4000$ à $y\,\%$ geven na een jaar aan kapitaal en interest samen $f\,7320$ en na twee jaar $f\,7654{,}80$; hoeveel zal het na 3 jaar zijn?

13. Waren lengte, breedte en dikte van een blokje hout alle 1 cM meer, dan was de inhoud 248 cM^3 meer; waren ze alle 1 cM minder, dan was de inhoud 192 cM^3 minder; men vraagt de oppervlakte en ook de gezamenlijke lengte der ribben.

14. Herleid $\sqrt{(129 - 24\sqrt{15} + 12\sqrt{10} - 30\sqrt{6})}$. (Stel $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$).

15. Twee kuben verschillen 279 cM^3 in inhoud. Als ieder der twee lichamen 13 cM^3 grooter was, zouden hunne ribben 3 cM verschillen. Bereken de inhouden.

16. Als x, y en z evenredig zijn met a, b en c en de som hunner vierkanten 100 is, bepaal dan x, y en z. (Gebruik maken van de eigenschappen van evenredigheden).

17. Bereken de zijden van een rechthoekigen driehoek, als gegeven zijn: de som der rechthoekszijden $= 35$ cM en de som van de schuine zijde en de hoogte $= 37$ cM.

18. Onderzoek, welke waarde men voor d moet kiezen, opdat $\sqrt{a + \sqrt{b}} \times \sqrt{c + \sqrt{d}}$ gelijk zij aan $\sqrt{m} + \sqrt{n} + \sqrt{p}$.

19. Van een rechthoekigen driehoek worden oppervlak en omtrek door hetzelfde getal aangewezen; de bissectrice van den rechten hoek is $3\frac{9}{17}\sqrt{2}$. Bereken de zijden.

ONBEPAALDE VERGELIJKINGEN.

§ 20. Aan **een vergelijking met twee onbekenden** voldoen een oneindig aantal paren waarden van de onbekende grootheden. Neemt men b.v. de vergelijking $2x - 5y = 7$, dan voldoen de volgende waarden:

$x = 6$ en $y = 1$	$x = 2$ en $y = -\,^3/_5$
$x = 5$ en $y = \,^3/_5$	$x = 1$ en $y = -1$
$x = 4$ en $y = \,^1/_5$	$x = 0$ en $y = -1\,^2/_5$
$x = 3$ en $y = -\,^1/_5$	$x = -1$ en $y = -1\,^4/_5$.

We hebben slechts aan één van de onbekenden een willekeurige waarde te geven en dan de bijbehoorende waarde van de andere onbekende te berekenen. Onder dit oneindig aantal willen we enkel zulke stellen wortels als oplossing aanmerken, waarbij ***x* en *y* beide geheel en positief** zijn. Hier voldoen blijkbaar 6 en 1, 11 en 3, 16 en 5, 21 en 7, enz.

Omdat bij elke waarde, die men voor y aanneemt, steeds $x = \frac{5y + 7}{2}$ is, is de vraag teruggebracht tot deze: wanneer is $\frac{5y + 7}{2}$ een geheel getal, of: wanneer is $2y + 3 + \frac{y + 1}{2}$ een geheel getal; dit zal het geval zijn, als $\frac{y + 1}{2} = a$ ($a =$ geheel), waaruit $y = 2a - 1$ en $x = \frac{5(2a - 1) + 7}{2} = 5a + 1$.

De serie geheele positieve wortels ligt dus opgesloten in $\begin{cases} x = 5a + 1 \\ y = 2a - 1 \end{cases}$, waarin $a \geqq 1$ is. Men noemt dit de oplossing van de onbepaalde vergelijking $2x - 5y = 7$.

Voorbeelden.

A. $$29x - 67y = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

Uit (I) volgt $29x = 67y + 1$ en $x = \frac{67y+1}{29}$; de teller kan nu steeds gesplitst worden in twee deelen, waarvan het eene wel, het andere niet deelbaar is door 29 nl. $58y + 9y + 1$; we krijgen nu $x = \frac{58y + 9y + 1}{29} = 2y + \frac{9y+1}{29}$; hierin moet ook $\frac{9y+1}{29}$ een geheel getal zijn, b. v. a, zoodat $9y + 1 = 29a$ en $9y = 29a - 1$, waaruit $y = \frac{29a-1}{9} = \frac{27a + 2a - 1}{9} = 3a + \frac{2a-1}{9}$; stelt men $\frac{2a-1}{9}$ nu weer gelijk aan een geheel getal b, dan heeft men $2a - 1 = 9b$ en $2a = 9b + 1$, $a = \frac{9b+1}{2} = \frac{8b+b+1}{2} = 4b + \frac{b+1}{2}$; $\frac{b+1}{2} = c$ stellende, vindt men $b = 2c - 1$; nu wordt $a = 4b + c =$ $= 4(2c-1) + c = 9c - 4$ en $y = 3a + b = 3(9c-4) + 2c - 1 =$ $= 29c - 13$ en $x = 2y + a = 2(29c - 13) + 9c - 4 = 67c - 30$.

De oplossing is dus $\begin{cases} x = 67c - 30 \\ y = 29c - 13 \end{cases}$, waarin c een willekeurig getal voorstelt. Voor c kan men nu nemen, wat men wil, mits niet kleiner dan 1, daar anders x en y beide negatief worden.

B. $$15x + 22y = 481 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

Uit (I) volgt:

$$x = \frac{481 - 22y}{15} = \frac{480 - 15y + 1 - 7y}{15} = 32 - y + \frac{1-7y}{15};$$

stel $\frac{1-7y}{15} = a$, dus $1 - 7y = 15a$, waaruit volgt $7y = 1 - 15a =$ $= -14a + 1 - a$; $y = -2a + \frac{1-a}{7}$. Stel $\frac{1-a}{7} = b$; voor a volgt dan $1 - 7b$, dus is $y = -2(1 - 7b) + b = 15b - 2$; voor x vindt men $32 - (15b - 2) + 1 - 7b = 35 - 22b$.

De oplossing is dus $\begin{cases} x = 35 - 22b \\ y = 15b - 2. \end{cases}$

Wenscht men dus enkel geheele positieve getallen, dan moet $22b \leqq 35$ zijn, en b dus enkel 1 of minder dan 1 zijn; y eischt echter,

dat $15b \geqq 2$, dus $b = 1$ of meer dan 1. Blijkbaar voldoet dus alleen $b = 1$; de eenige waarden voor x en y zijn dus $x = 35 - 22 = 13$ en $y = 15 - 2 = 13$.

§ **21.** Bij beide voorbeelden bestond de hoofdbewerking in de volgende deelingen:

```
29/67\2
 58
 ----
   9/29\3
    27
    ----
      2/9\4
       8
       ----
        1/2\2.
```

```
15/22\1
 15
 ----
   7/15\2
    14
    ----
      1/7\7.
```

Deze is dezelfde als die, welke in de rekenkunde gevolgd wordt voor het zoeken van den GGD; daar zal men spoediger dan gewoonlijk het doel bereiken, als men steeds zorg draagt, dat de resten minder dan de helft van den deeler zijn b.v.:

```
19/45\2
 38
 ----
   7/19\2
    14
    ----
      5/7\1
       5
       ----
        2/5\2
         4
         ----
          1/2\2.
```

```
19/45\2
 38
 ----
   7/19\3
    21
    ----
      2/7\3
       6
       ----
        1/2\2.
```

```
479/1350\2
    958
    ----
    392/479\1
        392
        ----
         87/392\4
            348
            ----
             44/87\1
                44
                ----
                 43/44\1
                    43
                    ----
                     1/43\43.
```

```
479/1350\3
    1437
    ----
      87/479\6
         522
         ----
          43/87\2
             86
             ----
              1/43\43.
```

C. Aldus zal men $\mathbf{19x - 45y = 4}$ als volgt oplossen:

$$x = \frac{45y + 4}{19} = \frac{38y + 7y + 4}{9} = 2y + \frac{7y + 4}{19}.$$

Stel $\frac{7y + 4}{19} = a$, dus $7y + 4 = 19a$ en $y = \frac{19a - 4}{7} =$

$$= \frac{21a - 7 + 3 - 2a}{7} = 3a - 1 + \frac{3 - 2a}{7}.$$

Stel $\frac{3 - 2a}{7} = b$, dus $3 - 2a = 7b$ en $a = \frac{3 - 7b}{2} =$

$= \frac{2 - 6b + 1 - b}{2} = 1 - 3b + \frac{1 - b}{2}$. Stel $\frac{1 - b}{2} = c$, dus $b = 1 - 2c$.

Men vindt nu $a = 1 - 3(1 - 2c) + c = -2 + 7c$.

$$\begin{cases} y = 3(-2 + 7c) - 1 + (1 - 2c) = 19c - 6. \\ x = 2(19c - 6) + (-2 + 7c) = 45c - 14. \end{cases}$$

D. Evenzoo $\mathbf{479x - 1350y = 7}$, als volgt:

$$x = \frac{1350y + 7}{479} = \frac{1437y + 7 - 87y}{479} = 3y + \frac{7 - 87y}{479}.$$

Stel $\frac{7 - 87y}{479} = a$, dus $43a = 87b - 7 = 86b + b - 7$ en $a = 2b + \frac{b - 7}{43}$.

Stel $\frac{b - 7}{43} = c$, dan is $b = 43c + 7$.

$$a = 2(43c + 7) + c = 87c + 14.$$

$$\begin{cases} y = -6(87c + 14) + (43c + 7) = -479c - 77. \\ x = 3(-479c - 77) + (87c + 14) = -1350c - 217. \end{cases}$$

Opdat x en y beide positief zijn, is noodig, dat voor c slechts geheele negatieve getallen genomen worden, in het algemeen dus $c = -d$; men heeft dan

$$\begin{cases} x = 1350d - 217 \\ y = 479d - 77, \end{cases}$$

waarin d geheel en positief.

§ 22. De voorbeelden A—D zijn zóó gekozen, dat zich vooraf geen bekortingen voordeden; dit zal wel het geval zijn, als twee

of meer der coëfficiënten van de vergelijking deelbaar zijn door eenzelfde getal b.v.:

$$4x + 16y = 87,$$
$$4x + 15y = 88,$$
$$5x - 16y = 12.$$

De eerste van deze vergelijkingen is $4(x + 4y) = 87$; daar 87 niet deelbaar is door 4, bestaan voor deze vergelijking geen geheele oplossingen.

De tweede is $4x - 88 = -15y$ of $4(x - 22) = -15y$. Daar 15 nu onderling ondeelbaar is met 4, moet y deelbaar zijn door 4; we stellen dus $y = 4z$ en krijgen daardoor $4(x - 22) = -15 \, . \, 4z$, of $x - 22 = -15z$, dus $x = 22 - 15z$.

De oplossing is nu $\begin{cases} x = 22 - 15z \\ y = 4z \end{cases}$; blijkbaar kan men voor z slechts het getal 1 nemen.

E. Bij de derde $\mathbf{5x - 16y = 12}$ moet x een viervoud zijn, want 16 en 12 hebben tot GGD 4; men vindt dus, als men $x = 4z$ stelt $5 \, . \, 4z - 16y = 12$ of $5z - 4y = 3$.

$4y = 5z - 3 = 4z - 4 + z + 1.$

$y = z - 1 + \frac{z + 1}{4}$. Stel $\frac{z + 1}{4} = a$, dan is $z = 4a - 1$.

Men vindt nu $\begin{cases} x = 4(4a - 1) = 16a - 4, \\ y = (4a - 1) - 1 + a = 5a - 2 \end{cases}$

waarin voor a elk getal van 1 af genomen kan worden. Een dergelijke bekorting komt ook onder de bewerking dikwijls voor b.v.

F. $\mathbf{7x + 31y = 59.}$ $\quad x = \frac{59 - 31y}{7} = \frac{56 - 28y + 3 - 3y}{7} =$ $8 - 4y + \frac{3 - 3y}{7}$; daar nu $\frac{3 - 3y}{7} = 3 \, . \, \frac{1 - y}{7}$ is, stelle men $\frac{1 - y}{7} = a$, waaruit $y = 1 - 7a$, terwijl men voor x vindt $8 - 4(1 - 7a) + 3 \, . \, a = 31a + 4$.

De oplossing is alzoo $\begin{cases} x = 31a + 4 \\ y = 1 - 7a. \end{cases}$

Voor a kan blijkbaar slechts 0 genomen worden.

G. $72x+23y=845$. $y=\frac{845-72x}{23}=\frac{851-69x-6-3x}{23}=$
$37-3x-3\,.\,\frac{x+2}{23}$; stel nu $\frac{x+2}{23}=a$, dan volgt $x=23a-2$
en $y=37-3(23a-2)-3\,.\,a=43-72a$.

De oplossing is dus $\begin{cases} x=23a-2 \\ y=43-72a. \end{cases}$

Voor a kan men blijkbaar slechts 0 nemen.

§ 23. Een uitbreiding van het voorgaande zal verkregen worden, als men de oplossing verlangt van **twee vergelijkingen met drie onbekenden;** we stellen daarbij denzelfden eisch nl. dat alleen die stellen wortels als oplossing aangemerkt worden, waarvoor zoowel x als y en z **positief en geheel** zijn Nemen we als voorbeeld:

$$\begin{cases} 5x-y+3z=22 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (I) \\ 3x+8y-2z=61 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (II) \end{cases}$$

De bekende wijze van oplossen volgende, vindt men na eliminatie van z de vergelijking:

$19x+22y=227$, die, op de gewone wijze opgelost, geeft $\begin{cases} x=5-22b \\ y=19b+6. \end{cases}$

Nu moet echter ook z nog een geheel getal zijn; deze waarden van x en y substitueerende vindt men:
$5(5-22b)-(19b+6)+3z=22$ en dus:

$$3z=3+129b \text{ en } z=43b+1.$$

De oplossing wordt nu: $\begin{cases} x=5-22b \\ y=19b+6 \\ z=43b+1. \end{cases}$

Blijkbaar laat de waarde van x slechts toe, dat $b=0$ is; het eenige stel wortels is dus 5, 6 en 1.

Hetzelfde resultaat had men verkregen, als men y had geëlimineerd; dan was men gekomen op de vergelijking $43x+22z=237$, waaruit volgt $\begin{cases} x=22a+5 \\ z=1-43a \end{cases}$. Substitueert men deze waarden in (I) dan vindt men $5(22a+5)-y+3(1-43a)=22$, waaruit $y=6-19a$.

De oplossing wordt nu $\begin{cases} x = 22a + 5 \\ y = 6 - 19a \\ z = 1 - 43a. \end{cases}$

Deze oplossing gaat in de eerste over, als men stelt $a = -b$; blijkbaar kan a alleen 0 zijn en vindt men ook weer 5, 6 en 1.

Men had ook x kunnen elimineeren; dan had men dus één vergelijking met de beide onbekenden y en z gekregen en wel: $43y - 19z = 239$, waaruit alweer volgt $\begin{cases} y = 19b + 6 \\ z = 43b + 1. \end{cases}$

Substitueert men deze beide in (I) dan vindt men $5x - (19b + 6) + 3(43b + 1) = 22$, dus $5x = 25 - 110b$ en $x = 5 - 22b$;

men vindt alzoo $\begin{cases} x = 5 - 22b \\ y = 19b + 6 \\ z = 43b + 1. \end{cases}$

Uit dit voorbeeld blijkt, dat men steeds dezelfde uitkomst krijgt, welke onbekende ook het eerst geëlimineerd wordt. **Hiervoor kiest men steeds echter die onbekende, waarvan de coëfficiënt de kleinste volstrekte waarde heeft,** hier dus y; in geen van beide vergelijkingen heeft x of z een kleineren coëfficiënt dan y in de eerste vergelijking.

De reden daarvan moge blijken uit het volgende.

Heeft men als 1e vergelijking

$$px + qy + rz = s$$

en na eliminatie van z verkregen $\begin{cases} x = 13b - 1 \\ y = 9b - 2 \end{cases}$, dan geeft de

substitutie $\quad p(13b - 1) + q(9b - 2) + rz = s$

en $\quad rz = -b(13p + 9q) + p + 2q + s.$

Nu zal z ook in b uitgedrukt worden, als zoowel $13p + 9q$, als $p + 2q + s$ deelbaar zijn door r, gelijk dat in het uitgewerkte voorbeeld wezenlijk uitkwam; dit is echter niet steeds het geval en er volgt dan nog een bewerking, waarbij nog een of meer hulpgrootheden optreden; is echter $r = 1$, dan behoeft men zeker niet verder te gaan; is $r \neq 1$, maar de kleinste van alle coëfficiënten, dan neme men toch voor de laatst te bepalen grootheid z en elimineere dus z het eerst. Bij de oplossing van

$$\begin{cases} 7x - 2y - 9z = 5 \\ 3x - 6y - z = -19 \end{cases}$$

elimineere men dus z, hoewel y meer voor de hand ligt, evenzoo zal men uit het stelsel

$$\begin{cases} 4x + 5y + 7z = 218 \\ 2x - 3y - 13z = -98 \end{cases}$$

eerst x elimineeren, niet omdat dit het eenvoudigst is, maar omdat 2 de kleinst voorkomende coëfficiënt is.

OPGAVEN.

§ 24. 1. $6x - 17y = 18.$

2. $2x + 5y = 100.$

3. $6x + 39y = 1.$

4. $9x - 5y = 71.$

5. $49x - 27y = 28.$

6. $5x + 11y = 1000.$

7. $43x - 12y = 158.$

8. $12x - 25y = 900.$

9. $47x - 97y = 845.$

10. $35x - 46y = 1515.$

11. $\begin{cases} 7x - 2y - 9z = 5 \\ 3x - 6y - z = -19. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x + 5y - 6z = 29 \\ 19x - 30y - 10z = 30. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x + 5y - 8z = 27 \\ 3x + 2y + z = 11. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 5x + 2y = 42 \\ 3y - 7z = 2. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 7x + 8y + 9z = 1940 \\ 3x + 2y + 5z = 82. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 10x - 6y + 11z = 1000 \\ 3x + 5y + 9z = 2000. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 4x + 3y - z = 8 \\ 3x - y + 5z = 25 \\ 17x + 3y + 13z = 91. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x - y + 5z = 27 \\ 3x + y - 2z = 24 \\ 29x - 7y + 44z = 342. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 4x - z = 1 \\ 4y - u = 4 \\ 4z - 5u = -8 \\ 4x - 4y - 5z + 6u = 5. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 3y - 2z = 8 \\ 3z - 2u = 4 \\ 9x - z = 2u + 41. \end{cases}$

21. Splits $\frac{41}{35}$ in de som van twee positieve breuken, met noemers 5 en 7.

22. Wat is het kleinste getal, dat bij deeling door 5, 7 en 9 opv. tot rest laat 4, 6 en 8?

23. Achttien mannen en vijf jongens verdienen samen per dag *f* 59; verdienden de mannen een halven gulden minder per dag en de jongens een halven gulden meer, dan zouden ze in twee dagen samen *f* 105 verdienen. Hoeveel verdient elk per dag?

24. Een bassin kan gevuld worden door watertoevoer door drie kranen en wel als volgt: A 7, B 1 en C 7 uur open; alle drie 5 uur open en A 6, B 3 en C 6 uur open. Hoelang zou elk afzonderlijk open moeten staan om het bassin vol te krijgen?

LOGARITHMEN.

§ 25. Vroeger hebben wij gezien, dat door de omkeering van de machtsverheffing de worteltrekking ontstaat. Is b.v. $2^3 = 8$ en onderstelt men de uitkomst 8 en de exponent 3 bekend, dan kan men vragen: welk getal moet men tot de derde macht verheffen, om 8 als uitkomst te krijgen? Blijkbaar is 2 het gezochte getal, hetgeen men uitdrukt door te zeggen: 2 is de derde wortel uit 8 en te schrijven: $\sqrt[3]{8} = 2$.

Het is echter duidelijk, dat deze omkeering niet de eenige is; men kan nl. ook den exponent als onbekende nemen en vragen: tot welke macht moet het getal 2 verheven worden, om 8 als uitkomst te verkrijgen? We vinden in dit geval spoedig, dat 3 de exponent der gezochte macht is.

Was 4 het grondtal geweest van de macht en 8 de uitkomst, dan zou de bedoelde exponent $1\frac{1}{2}$ geweest zijn; immers: $4^{1^1/_2} = 8$.

Was 8 het grondtal geweest van de macht, dan zou de bedoelde exponent 1 zijn, daar $8^1 = 8$.

Deze exponenten 3, $1\frac{1}{2}$, 1 noemt men logarithmen van de macht 8 en wel ter onderscheiding, opvolgend de 2-logarithme, de 4-logarithme, de 8-logarithme, hetwelk men als volgt schrijft:

$$^2\log 8 = 3$$
$$^4\log 8 = 1\tfrac{1}{2}$$
$$^8\log 8 = 1.$$

Onder de *a*-logarithme van *b* verstaat men den exponent der macht, waartoe *a* moet verheven worden, om *b* als uitkomst te verkrijgen.

Uit deze bepaling volgt, dat

$$^{a}\log b = p$$

en $$a^p = b$$

twee volkomen gelijkwaardige vergelijkingen zijn. Tevens dat

$$\boxed{a^{^{a}\log b} = b}$$

geldt als bepaling van $^{a}\log b$.

OPGAVEN.

§ **26.** 1. Bepaal de logarithmen van de volgende getallen voor het grondtal 2:

2; 16; $\sqrt{2}$; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{64}$; $\sqrt[3]{16}$; $2\sqrt{2}$; $0,25$; $0,125$.

2. Bepaal de logarithmen der volgende getallen voor het grondtal 5:

25; 125; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{125}$; 5; 1; $\sqrt{5}$; $\frac{1}{5}\sqrt{5}$; $\sqrt[4]{125}$.

3. Bepaal: $^{10}\log 100$; $^{8}\log 512$; $^{16}\log 32$; $^{4}\log \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

4. $^{4}\log 64$; $^{9}\log \frac{1}{3}$; $^{4}\log \sqrt[4]{2}$; $^{9}\log \sqrt[5]{243}$.

5. $^{4}\log 32$; $^{10}\log 0,01$; $^{3}\log \sqrt{3}$; $^{9}\log 27$.

6. $^{10}\log 1$; $^{10}\log 1000$; $^{10}\log 0,0001$; $^{10}\log \sqrt[3]{0,01}$.

7. $^{10}\log \sqrt[5]{100}$; $^{\sqrt{2}}\log 2$; $^{8}\log 4\sqrt{2}$; $^{9}\log 3\sqrt{3}$.

8. Wat is het grondtal, als:

$\log 25 = 2$; $\log 2\sqrt{2} = 3$; $\log 16 = \frac{1}{2}$;
$\log 5 = 1\frac{1}{2}$; $\log 3 = 2$; $\log \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

9. Hoeveel is: $3^{^{3}\log 7}$; $5^{^{5}\log 16}$; $9^{^{9}\log 10}$; $(p^{^{p}\log q})^{^{q}\log r}$?

10. Bereken: $a^{^{a}\log b} \times b^{^{b}\log c} \times c^{^{c}\log d}$.

11. Schrijf de getallen op, waarvan de logarithmen zijn 5, $\frac{2}{3}$, -2 en $-\frac{2}{5}$, als het grondtal is 25; ook voor de grondtallen 8 en 3.

12. Tusschen welke geheele getallen liggen $^{10}\log 72$; $^{5}\log 150$; $^{7}\log \frac{1}{30}$; $^{0,01}\log 3180$; $^{100}\log (9499 \times 989)$?

§ **27**. Uit het voorgaande is gebleken, dat men van een getal verschillende logarithmen kan nemen, b.v. $^{2}\log 16 = 4$, $^{8}\log 16 = 1\frac{1}{3}$ enz. Wanneer men voor één vast getal als grondtal of basis de logarithmen van de getallen berekent, dan verkrijgt men een **logarithmenstelsel** voor dat grondtal. Men kan dus spreken van het 2-logarithmenstelsel, het 3-logarithmenstelsel, enz. Er zijn blijkbaar oneindig veel logarithmenstelsels denkbaar.

Toch zijn lang niet alle getallen geschikt, om als grondtal van een logarithmenstelsel gekozen te worden; het getal 1 b.v. is geheel onbruikbaar, want alle machten van 1 zijn weer 1. Het getal 1 zou dus oneindig veel logarithmen hebben, terwijl alle andere getallen er geen zouden hebben.

Negatieve getallen zijn ook ongeschikt voor grondtal; want bij een negatief grondtal b.v. — 3, hebben weer niet alle getallen een logarithme; 27 b.v. heeft dan geen logarithme, — 27 daarentegen wel.

Er zijn twee logarithmenstelsels in gebruik gekomen; het eene heet **het natuurlijke stelsel.** Het grondtal ervan is een onmeetbaar getal 2,71828 . . . , gewoonlijk aangeduid door de letter e. Deze e-logarithmen, ook wel **Nepersche** logarithmen genoemd naar den ontdekker der logarithmen Neper, worden echter alleen in de hoogere wiskunde gebruikt. Het tweede stelsel heet het **Briggsche of gewone** logarithmenstelsel en heeft 10 als grondtal; deze worden voor alle gewone berekeningen gebezigd. Het Briggsche stelsel heeft zijn naam gekregen naar den Engelschman Briggs, die het eerst de logarithmen van de getallen van 1—20000 en van 90000—100000 berekende; de logarithmen van de tusschenliggende getallen zijn berekend door den Goudschen boekhandelaar en wiskundige **Adriaen Vlacq.**

§ 28. ALGEMEENE EIGENSCHAPPEN VAN LOGARITHMEN.

Eigenschap I. In elk logarithmenstelsel is de logarithme van het grondtal gelijk aan de eenheid.

Bewijs: Daar $g^1 = g$,

is $^{g}\log g = 1$.

Eigenschap II. In elk logarithmenstelsel is de logarithme van de eenheid gelijk aan 0.

Bewijs:

$$\text{Daar } g^0 = 1, \text{ is } \log 1 = 0.$$

Eigenschap III. In elk logarithmenstelsel is de logarithme van een product gelijk aan de som van de logarithmen der factoren.

Bewijs:

Noem het grondtal g, dan zullen we bewijzen dat:

$$^g\!\log abc = {}^g\!\log a + {}^g\!\log b + {}^g\!\log c.$$

Daartoe is het voldoende, als we bewijzen dat:

$$g^{^g\!\log a + {}^g\!\log b + {}^g\!\log c} = abc.$$

Maar dit is zoo, want:

$$g^{^g\!\log a + {}^g\!\log b + {}^g\!\log c} = g^{^g\!\log a} \times g^{^g\!\log b} \times g^{^g\!\log c} = a \times b \times c.$$

Eigenschap IV. In elk logarithmenstelsel is de logarithme van een quotiënt gelijk aan het verschil der logarithmen van deeltal en deeler.

Bewijs:

We moeten bewijzen: $^g\!\log \frac{a}{b} = {}^g\!\log a - {}^g\!\log b$,

of dat: $$g^{^g\!\log a - {}^g\!\log b} = \frac{a}{b}.$$

Maar dit is zoo, want

$$g^{^g\!\log a - {}^g\!\log b} = \frac{g^{^g\!\log a}}{g^{^g\!\log b}} = \frac{a}{b}.$$

Eigenschap V. In elk logarithmenstelsel is de logarithme van een macht van een getal gelijk aan de logarithme van het grondtal vermenigvuldigd met den machtsexponent.

Bewijs:

We moeten bewijzen, dat:

$$^g\!\log a^p = p \times {}^g\!\log a,$$

of dat: $$g^{p \times {}^g\!\log a} = a^p.$$

Dit is zoo, omdat $g^{p \times {}^g\!\log a} = (g^{^g\!\log a})^p = a^p$.

Eigenschap VI. In elk logarithmenstelsel is de logarithme van een wortel uit een getal gelijk aan de logarithme van dat getal, gedeeld door den wortelexponent.

Bewijs:

We moeten bewijzen: $^{g}\log \sqrt[p]{a} = \frac{1}{p} \times {}^{g}\log a,$

of dat: $$g^{\frac{1}{p} \times {}^{g}\log a} = \sqrt[p]{a}.$$

Dit is zoo, want $$g^{\frac{1}{p} \times {}^{g}\log a} = \sqrt[p]{g^{{}^{g}\log a}} = \sqrt[p]{a}.$$

Opmerking: We hebben de vorige eigenschappen alle bewezen uit de bepaling, die we van logarithme hebben gegeven. We hadden ook anders te werk kunnen gaan, b.v. voor eigenschap III:

Stel $\quad {}^{g}\log a = p, \quad {}^{g}\log b = q \quad$ en $\quad {}^{g}\log c = r,$
dan is $\quad g^p = a, \quad g^q = b \quad$ en $\quad g^r = c.$
Dus: $\quad abc = g^p \times g^q \times g^r = g^{p+q+r}.$
Waaruit volgt: $\quad {}^{g}\log abc = p + q + r = {}^{g}\log a + {}^{g}\log b + {}^{g}\log c.$

Op dezelfde wijze kunnen we eig. IV, V en VI bewijzen.

I. $\quad {}^{g}\log g = 1.$

II. $\quad \log 1 = 0.$

III. $\quad \log abc = \log a + \log b + \log c.$

IV. $\quad \log \frac{a}{b} = \log a - \log b.$

V. $\quad \log a^n = n \log a.$

VI. $\quad \log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a.$

OPGAVEN.

§ 29. Pas de eigenschappen toe op:

1. $\log abc;$ $\quad \log 2ab^2;$ $\quad \log \frac{ab}{c};$ $\quad \log \frac{1}{a}.$

2. $\log \frac{(a+b)^2 c}{(d-e)^3};$ $\quad \log \sqrt{a};$ $\quad \log \frac{1}{a}\sqrt{a};$ $\quad \log \sqrt[5]{a^2 b^3}.$

3. $\log \frac{a^2 \sqrt[3]{a}}{b^3};$ $\quad \log \sqrt[4]{\frac{a^2 \sqrt{b}}{c \sqrt[3]{d^2}}};$ $\quad \log (a^2 - b^2);$ $\quad \log a^2 - b^2.$

4. $\log \log a^5;$ $\quad \log \log (\frac{3}{2})^7;$ $\quad \log \log a^{pq};$ $\quad \log \log ({}^{a}\log a^{pq}).$

5. Als een getal meetkundig middelevenredig is tusschen twee andere getallen, dan is de logarithme van dat getal rekenkundig middelevenredig tusschen de logarithmen dier twee andere getallen. Bewijs.

6. Als gegeven is, dat ${}^{10}\log 2 = 0{,}30103$ en ${}^{10}\log 3 = 0{,}47712$ is, wat is dan:

${}^{10}\log 20$;	${}^{10}\log 0{,}2$;	${}^{10}\log 20000$;	${}^{10}\log \frac{1}{2}$;
${}^{10}\log 6$;	${}^{10}\log 12$;	${}^{10}\log 5$;	${}^{10}\log 1\frac{1}{2}$;
${}^{10}\log 15$;	${}^{10}\log 4\frac{1}{2}$;	${}^{10}\log 13\frac{1}{3}$;	${}^{10}\log 13\frac{1}{2}$?

7. Als gegeven is, dat de ^{10}logarithme van 7623 is: 3,88213, schrijf dan de getallen op, waarvan de ^{10}logarithmen zijn:
   0,88213; 4,88213; 0,88213 — 2.

8. Bewijs dat:
$$\log \tfrac{11}{15} + \log \tfrac{490}{267} - 2\log \tfrac{7}{9} = \log 2 \text{ is.}$$

9. Bepaal x uit:
$\log x = \log 5 + \log 3 - \log 2$;
$\log x = 3\log 2 + 2\log 3 - \log 18$;
$\log x = 2\log a + \frac{1}{2}\log b - \frac{1}{3}\log c$;
$\log x = \log (a + b) - \frac{1}{3}\log (a - b) - \frac{1}{6}\log (c + d)$;
$\log \log x = \log 5 + \log \log 1\frac{1}{2}$;
$\log \log x = \log p + \log (\frac{1}{2}\log q + \frac{1}{3}\log r)$.

10. Als men log 2, log 3, log 7 en log 11 als bekend aanneemt, hoe zult ge dan vinden: log 0,0021; log 147^2?

11. Bereken: $\sqrt{\dfrac{3\log 1728}{1 + \frac{1}{2}\log 0{,}36 + \frac{1}{3}\log 8}}$.

12. Bepaal log 5, log 7 en log 13, als gegeven zijn:
$\log 35 = 1{,}54407$, $\log 325 = 2{,}51188$, $\log 245 = 2{,}38917$.

13. Gegeven $\log 2 = 0{,}30103$; bepaal log 25, log 0,03125 en $\log (0{,}025)^{1/3}$.

14. Gegeven $\log 42 = p$, $\log 12 = q$, $\log 441 = r$; bepaal hieruit log 5, log 7, log 8 en log 9.

15. Herleid zoodanig, dat niet anders dan logarithmen van ondeelbare getallen voorkomen:

$$\log 27\tfrac{1}{2} - \log 4{,}48 + 2\log \tfrac{81}{100} + \log 102{,}9 +$$
$$- \log 0{,}2673 - 2\log 35.$$

16. Herleid: $\dfrac{\log \sqrt{27} + \log 8 - \log \sqrt{1000}}{\log 1{,}2}$.

17. Eveneens: $7 \,.\, {}^2\log \tfrac{16}{15} - 5 \,.\, {}^2\log \tfrac{24}{25} + 3 \,.\, {}^2\log \tfrac{81}{80}$.

EIGENSCHAPPEN VAN HET BRIGGSCHE STELSEL.

§ **30.** Beschouwt men de termen der schaal van ons talstelsel

1000; 100; 10; 1; 0,1; 0,01; 0,001; enz.

waarvoor we ook kunnen schrijven:

10^3; 10^2; 10^1; 10^0; 10^{-1}; 10^{-2}; 10^{-3}; enz.

dan vinden we hieruit:

$\log 1000 = 3$;	$\log 0{,}1 = -1$;
$\log 100 = 2$;	$\log 0{,}01 = -2$;
$\log 10 = 1$;	$\log 0{,}001 = -3$;
$\log 1 = 0$;	enz.

We hebben dus de eigenschap:

De logarithme van een term van de schaal van ons talstelsel is gelijk aan het aantal nullen, dat die term bevat, en wel positief, als deze nullen rechts, en negatief, als ze links staan.

Daar verder het grondtal positief is en omdat alle machten van een positief getal zelf ook positief zijn, zullen negatieve getallen geen logarithme hebben. Aangezien verder, zooals we al gezien hebben, de logarithme van de eenheid 0 is, zal men om een getal grooter dan 1 te krijgen, het grondtal tot een positieve macht en om een getal kleiner dan 1 te krijgen, het grondtal tot een negatieve macht moeten verheffen. Dus hebben omgekeerd alle getallen, die grooter dan 1 zijn, een positieve logarithme en alle getallen, die kleiner dan 1 zijn, een negatieve logarithme.

§ **31. Alle getallen, die geen machten van het grondtal 10 zijn (hetzij met positieven, hetzij met negatieven exponent) hebben een onmeetbaar getal als logarithme.**

Bewijs: We zullen hiertoe aantoonen, dat de logarithme van een willekeurig getal, b.v. log 21, niet voorgesteld kan worden door een geheel getal en ook niet door een breuk.

Daar het getal 21 ligt tusschen 10^1 en 10^2, ligt log 21 tusschen 1 en 2 en kan dus niet een geheel getal zijn. Onderstellen wij nu eens, dat log 21 een breuk is, b.v. log $21 = 1\frac{2}{3}$, dan moet volgens de bepaling:

$$10^{1^2/_3} = 21 \text{ en dus } 10^5 = 21^3 \text{ zijn.}$$

Dit nu is onmogelijk, want het eerste lid bestaat slechts uit de ondeelbare factoren 2 en 5, terwijl in het tweede lid geen factoren 2, maar wel factoren 7 voorkomen. Daar dus log 21 niet door een geheel getal en ook niet door een gebroken getal is voor te stellen, moet het wel een onmeetbaar getal zijn.

Opmerking. 1. Wanneer we in plaats van 21 (waarin slechts andere factoren voorkomen dan 2 en 5), een ander getal hadden genomen, dat slechts uit factoren 2 en 5 bestaat, b.v. 40, dan verloopt het bewijs als volgt:

1e. log 40 kan geen geheel getal zijn (als boven).

2e. Stel log $40 = 1 +$ echte breuk, b.v. $1\frac{3}{4}$.

Daaruit volgt: $10^{1^3/_4} = 40$, dus:

$$10^7 = 40^4.$$

Dit is onmogelijk, want in het eerste lid staan evenveel factoren 2 als factoren 5, in het tweede lid echter driemaal zooveel factoren 2 als factoren 5. Hieruit volgt weer, dat log 40 een onmeetbaar getal is.

2. Alle eigenschappen, die voor machten met meetbare exponenten zijn bewezen, gelden ook voor machten met onmeetbare exponenten.

§ **32.** Beschouwen wij nu de logarithmen van twee getallen, die met dezelfde cijfers geschreven worden en die slechts verschillen in de plaats van het decimaalteeken. Van twee zulke getallen moet altijd het eene het product zijn van het andere met een term van de schaal van het tientallig stelsel. Dus volgen § 28 Eig. III.

zullen de logarithmen van twee zulke getallen een geheel aantal eenheden verschillen. B.v.

$$\log 213,5 = \log (100 \times 2,135) = \log 100 + \log 2,135 =$$
$$= 2 + \text{een onmeetbare decimale breuk.}$$

log 213,5 en log 2,135 verschillen dus 2 eenheden.

Verder merken wij nog op, dat:

$$\log 0,002135 = \log \frac{2,135}{1000} =$$
$$= \log 2,135 - \log 1000 \text{ (§ 28, Eig. IV)}$$
$$= \text{een onmeetbare decimale breuk} - 3.$$

Naar aanleiding van bovenstaande eigenschap, worden de logarithmen altijd met een **positief decimaal gedeelte** geschreven. Zoo wordt log 0,03 niet in den vorm — 1,52288 geschreven, maar in den vorm: 0,47712 — 2. Van alle getallen, die geen termen van de schaal zijn, worden de logarithmen op deze wijze geschreven als een onmeetbare decimale breuk plus of min een geheel getal. Zoo is:

$$\log 30 = 0,47712 + 1 = 1,47712,$$
$$\log 0,3 = 0,47712 - 1,$$
$$\log 3000 = 0,47712 + 3 = 3,47712.$$

*De onmeetbare decimale breuk heet **mantisse**, het positieve of negatieve geheele getal heet **wijzer**.*

§ 33. De wijzer van de logarithme van elk getal is altijd dadelijk op te schrijven.

Beschouwen we daartoe een getal, dat grooter is dan 1, en laten er n cijfers in de geheelen van dat getal staan; het beschouwde getal is dus minder dan 10^n en meer dan 10^{n-1}. De logarithme ligt dus tusschen n en $n - 1$; dus is de logarithme gelijk aan $n - 1$ plus de mantisse. We hebben dus de eigenschap:

De wijzer van de logarithmen van getallen grooter dan 1 is één minder dan het aantal cijfers in de geheelen van dat getal.

B.v. log 271 heeft tot wijzer 2, omdat het een geheel getal is, dat uit 3 cijfers bestaat.

log 35,7215 heeft tot wijzer 1, omdat de geheelen van dit getal (35) uit 2 cijfers bestaan.

Beschouwen wij nu getallen kleiner dan 1; schrijf zoo'n getal als een decimale breuk en veronderstel, dat er n nullen aan den linkerkant van deze breuk staan. Het getal is dan minder dan 10^{-n+1} en meer dan 10^{-n}; daar we afgesproken hebben, dat het decimale deel van het logarithme positief zal worden genomen, zal dus de logarithme zijn: $-n +$ een decimale breuk, de wijzer is dus $-n$. Hieruit volgt de eigenschap:

De wijzer van de logarithmen van decimale breuken kleiner dan 1 is negatief en bestaat uit zooveel eenheden, als er nullen aan den linkerkant der breuk staan.

B.v. log 0,03 heeft tot wijzer — 2;
log 0,0002756 „ „ „ — 4.

§ 34. Met behulp van de vorige § kunnen wij nu dadelijk den wijzer van de logarithme van elk getal opschrijven. De mantissen (onmeetbare getallen, zooals we gezien hebben) zijn vereenigd in tafels, waarin ze afgerond tot in 4, 5, 6 of 7 decimalen opgegeven worden, nauwkeurig tot op $\frac{1}{2}$ eenheid der laatste decimaal [1]).

Op de eerste bladzijde van een logarithmentafel met 5 decimalen vinden we de logarithmen der getallen van 1 tot 100, met wijzer en mantisse. Op de volgende bladzijden worden alleen de mantissen vermeld der getallen van 1 tot 10000.

De getallen staan in een kolom, waarboven G (getal) of N (numerus) staat, de logarithmen in kolommen, waarboven Log of L (logarithmus) staat. Beschouwen we de logarithmen van eenige achtereenvolgende getallen b.v.:

$$\log 9680 = 3{,}98588$$
$$\log 9681 = 3{,}98592$$
$$\log 9682 = 3{,}98597$$
$$\log 9683 = 3{,}98601$$

1) P. Wijdenes Logarithmen- en rentetafels, uitgave A of B.
J. Versluys Gewone en gon. log. in 5 dec., uitgave D of E.
J. Versluys Groote tafel H.
Dr. B. Gonggrijp Logarithmentafels, uitgave B of D.
Deze tafels zijn uitgaven van P. Noordhoff te Groningen.

log 9684 = 3,98605
log 9685 = 3,98610
log 9686 = 3,98614
log 9687 = 3,98619
log 9688 = 3,98623
log 9689 = 3,98628

Deze logarithmen verschillen alleen in de laatste drie cijfers der mantissen. Men kan daarom de bovenstaande mantissen op de volgende wijze duidelijk en kort aangeven:

G	Log 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
968	**98** 588	592	597	601	605	610	614	619	623	628

De beide eerste cijfers 98, die bij al deze mantissen dezelfde blijven, zijn nu niet herhaald; ze worden gevolgd door een der groepen cijfers, die er achter staan, naar gelang van het laatste cijfer van het getal. Om b.v. de logarithme van 68,04 te zoeken, merken wij allereerst op, dat de wijzer 1 is, omdat de geheelen van het getal uit 2 cijfers bestaan. Wij zoeken nu in de tafel op 6804, daar de mantisse van 6804 dezelfde is als die van 68,04; de mantissen van de getallen, waarvan de eerste cijfers 680 zijn, beginnen met de cijfers 83; de cijfers in dezelfde rij, die in de kolom onder de 4 staan, zijn 276. De gezochte logarithme is dus 1,83276.

Komt er in een horizontale rij mantissen verandering in de tweede decimaal b.v. bij de logarithmen der getallen 1510, 1511, 1512, 1513, 1514, 1515, 1516, 1517, 1518, 1519, dan gelden de cijfers der tienden en honderdsten nl. 17 slechts voor de eerste 4 getallen, terwijl het 18 wordt voor de laatste 6; in dat geval kan men dus in de kolom onder L noch 17 noch 18 gebruiken, want plaats voor beiden is er niet.

Als waarschuwing nu, dat men met de tweede decimaal overgaat op een volgend cijfer, zet men bij die getallen een sterretje; de volgende rij heeft dan een ander cijfer der honderdsten.

§ 35. We kunnen nu de logarithmen van alle getallen van 4 cijfers opzoeken. Bestaat een getal uit meer dan 4 cijfers

b.v. 21732, dan redeneert men als volgt: 21732 ligt tusschen 21730 en 21740. Log 21732 moet dus tusschen log 21730 en log 21740 in liggen. De tafel geeft aan, dat

$$\log 21740 = 4{,}33726$$
$$\text{en } \log 21730 = 4{,}33706.$$

Wanneer het getal toeneemt van 21730 tot 21740, neemt blijkbaar de logarithme toe van 4,33706 tot 4,33726, d.i. met 20 eenheden der laatste decimaal. Voor een toename van het getal van 10 eenheden, vinden we een toename van de logarithme met 20 eenheden der laatste decimaal; voor een toename van het getal met 2 eenheden zal er dus een toename van de logarithme zijn van $\frac{2}{10} \times 20$ eenh. $=$ 4 eenh. der laatste decimaal, Men vindt dus:

$\log 21732 = 4{,}33706 + 4$ eenh. der laatste decimaal $= 4{,}33710$ [1]),

Ter vereenvoudiging van de bewerking vindt men in de laatste kolom van de tafel het bedrag, waarmee de logarithme toegenomen is (het evenredige deel) reeds uitgerekend, zoodat nu het interpoleeren van de gezochte logarithme tusschen de beide bekende logarithmen neerkomt op het verrichten der volgende bewerkingen:

1e. het zoeken van de logarithme van het getal, dat ontstaat door het laatste cijfer door een nul te vervangen;

2e. het verschil met de volgende logarithme te bepalen;

3e. het zoeken van het evenredige deel voor het cijfer der eenheden, behoorende bij het zoo juist gevonden verschil;

4e. het optellen van dit evenredige deel bij de eerstgevonden logarithme.

We schrijven nu deze interpolatie als volgt:

$$\begin{array}{r} \log 21730 = 4{,}33706 \\ 2 \qquad\quad 4 \\ \hline \log 21732 = 4{,}33710 \end{array}$$

Op gelijke wijze kunnen wij nu ook de logarithmen bepalen

---

1) *Opmerking.* Hierbij hebben we gebruik gemaakt van de niet geheel juiste stelling, dat de toename der logarithmen evenredig is met de toename der getallen.

van getallen, die uit 6 of meer cijfers bestaan; zij b.v. gevraagd naar log 203258:

log 203200 =	5,30792
50	11,0
8	1,76
log 203258 =	5,30804 76.

We ronden dit getal weer af tot op 5 decimalen en schrijven nu:

$$\log 203258 = 5{,}30805.$$

§ **36**. We zullen nu nagaan, op welke wijze het getal gevonden wordt, waarvan de logarithme gegeven is.

Zij gevraagd x te bepalen, als gegeven is:

$$\log x = 2{,}45879.$$

In de tafel zoeken wij nu de mantissen op, die met de cijfers 45 beginnen en daarna de groep cijfers 879. Daar deze groep zich bevindt in de rij, waarvoor de cijfers 287, en in de kolom, waarboven het cijfer 6 geplaatst is, behoort deze mantisse dus bij een getal, dat bestaat uit de cijfers 2876. Daar de wijzer van de logarithme 2, is bestaan de geheelen van het gezochte getal uit 3 cijfers, zoodat het getal is 287,6.

II. Zij gevraagd x te bepalen, als gegeven is:

$$\log x = 0{,}58070 - 2.$$

We zoeken weer eerst de mantissen op, die met de beide cijfers 58 beginnen; daarna trachten wij als bijbehoorende volgende groep cijfers 070 te vinden. De gegeven mantisse bevindt zich in de rij, waarvoor de cijfers 380 en in de kolom, waarboven het cijfer 8 staat; zij behoort dus bij een getal, dat bestaat uit de cijfers 3808. Daar de wijzer — 2 is, staan aan den linkerkant van dit getal twee nullen; het getal is dus:

$$0{,}03808.$$

III. Zij gevraagd x, als gegeven is:

$$\log x = 0{,}66338.$$

We zoeken eerst weer de mantissen, die met de cijfers 66 beginnen; daarna trachten we de mantisse te vinden, die als

volgende groep cijfers 338 heeft. Het blijkt, dat deze groep niet in de tafel voorkomt; de naast kleinere groep is 332, de naast grootere is 342. De getallen, waarbij 66332 en 66342 als mantissen behooren, zijn opv. 4606 en 4607, of als wij dat liever hebben: 46060 en 46070. Het gezochte getal moet tusschen 46060 en 46070 liggen. Deze beide getallen verschillen 10, de mantissen hunner logarithmen verschillen 10 eenheden der laatste decimaal. Als de mantisse met 10 eenheden der laatste decimaal aangroeit, blijkt het getal met 10 eenheden te zijn toegenomen; als dus de mantisse met 6 eenheden is aangegroeid, zal het getal ook slechts met 6 eenheden zijn toegenomen; het getal zal dus bestaan uit de cijfers 46066. Daar verder de wijzer 0 is, bestaan de geheelen uit 1 cijfer en dus is het getal 4,6066.

Opmerking. We kunnen het vijfde cijfer ook bepalen met behulp van de laatste kolom; daartoe nemen we het hulptafeltje, waar 10 (het verschil van de beide groepen, waartusschen de beide laatste cijfers van de mantisse liggen) boven staat. We vinden nu, dat een toename van de mantisse met 6 plaats heeft, als 6 het laatste cijfer is van het getal, zoodat dus hiervoor gevonden wordt 4,6066.

IV. Zij gevraagd x, als gegeven is:

$$\log x = 3{,}46057.$$

We zoeken weer de mantissen op, die met 46 beginnen en daarna de groep 057 of de naast kleinere groep (hier 045); het getal, dat bij de mantisse 46045 behoort, bestaat uit de cijfers 2887. Het verschil met de volgende mantisse is 15; in het hulptafeltje vinden wij, dat het vijfde cijfer 8 is, als de vermeerdering in mantisse 12 bedraagt; het gezochte getal bestaat dus uit de cijfers 28878. De wijzer bestaat uit 3 eenheden, het getal is dus 2887,8.

V. Zij gevraagd x, als gegeven is $\log x = -0{,}57949$; we schrijven hiervoor $\log x = 0{,}42051 - 1$.

In de tafel zoeken wij eerst de mantissen op, die met de cijfers 42 beginnen en daarna de groep 051 of de naast kleinere

groep (hier 045); het getal, dat bij 42045 als mantisse behoort, bestaat uit de cijfers 2633. Het verschil met de volgende mantisse is 17; in het hulptafeltje, waar 17 boven staat, vinden wij geen vermeerdering met 6, maar wel met 5,1 als het vijfde cijfer 3 is. Er moet dus nog een zesde cijfer geweest zijn, dat een vermeerdering van 0,9 gegeven heeft; men kan daarvoor het cijfer 5 nemen, dat een vermeerdering van 0,85 geeft. De gegeven mantisse behoorde dus bij het getal 263335. Daar de wijzer — 1 is, vinden wij:

$$x = 0{,}263335$$

OPGAVEN.

§ **37.** 1. Zoek in de tafel op:

log 7;	log 3,25;	log 2200;	log 9,568;
log 25:	log 0,217;	log 1752;	log 0,9999;
log 61;	log 0,31;	log 3789;	log 66,87;
log 375;	log 35,2;	log 5827;	log 20110;
log 977;	log 0,0599;	log 9921;	log 0,1138.

2.

log 1083;	log 17281;	log 776,72;	log 18,625;
log 1625;	log 58427;	log 97,735;	log 7,9437;
log 3,808;	log 8,8652;	log 6761,3;	log 0,99328;
log 0,06769;	log 0,37983;	log 0,27574;	log 8511,6;
log 27,58;	log 6917,5;	log 0,0075876;	log 1,2309.

3.

log 180624;	log 16,2735;
log 0,492517;	log 107756;
log 15,2728;	log 0,0138062;
log 1,29806;	log 102,396.

4. Zoek de getallen op, behoorende bij de volgende logarithmen:

3,29951;	1,59040;	1,77133;	0,09280;
0,22141;	3,14239;	0,60166 — 2;	3,21171;
2,69179;	0,69011 — 1;	4,90077;	0,01000;
4,44685;	0,95027 — 3;	2,80886;	0,10000;
0,89998 — 2;	2,90004;	1,13900;	— 2,95999;

§ 38. BEREKENINGEN DOOR MIDDEL VAN LOGARITHMEN.

We zijn door het voorgaande in staat gesteld berekeningen, die op de gewone manier omslachtig of zelfs dikwijls onmogelijk zijn, eenvoudig uit te voeren; elke **vermenigvuldiging** toch wordt door toepassing van $\log ab = \log a + \log b$ omgezet in een optelling: men zoeke slechts de logarithmen van a en b op, telle ze op, waardoor de logarithme bekend is van het product en zoeke nu het product er bij; de bewerking is dus: opzoeken, optellen, opzoeken; bij **deelen** is het opzoeken, aftrekken, opzoeken; bij **machtsverheffen**, b.v. $x = a^b$, waaruit $\log x = b \times \log a$, heeft men: zoek $\log a$, vermenigvuldig deze met b, zoek het getal bij die logarithme; bij $x = \sqrt[b]{a}$ is het: zoek $\log a$, deel door b, zoek het getal er bij. Zoo blijkt het, dat $1{,}05^{40}$ even eenvoudig gevonden wordt als $1{,}05^3$; dat $\sqrt[13]{2}$ even gemakkelijk berekend wordt als $\sqrt{2}$; het eenige nadeel is, dat de antwoorden slechts 4 à 5 juiste cijfers bevatten, een nadeel, dat ook bij een tafel met 7 decimalen blijft bestaan, waar men er 6 of 7 vindt. De antwoorden zijn dus steeds benaderd, zoodat door toepassing der directe bewerkingen de laatste cijfers iets kunnen verschillen. Sommen en verschillen worden term voor term berekend.

Voorbeelden:

1. Bereken: $x = 3{,}256 \times 21{,}05 \times 1{,}769.$

$$\log x = \log 3{,}256 + \log 21{,}05 + \log 1{,}769$$

$$\begin{aligned} \log 3{,}256 &= 0{,}51268 \\ \log 21{,}05 &= 1{,}32325 \\ \log 1{,}769 &= 0{,}24773 \\ \hline \log x &= 2{,}08366 \quad + \\ x &= 121{,}244 \end{aligned}$$

Bij rechtstreeksche vermenigvuldiging vinden wij:

$$x = 121{,}24513720.$$

2. Bereken: $x = \frac{89{,}263 \times 1{,}0257}{3{,}5603}$.

$$\log x = \log 89{,}263 + \log 1{,}0257 - \log 3{,}5603.$$

$$\begin{array}{rl} \log 89{,}263 = 1{,}95068 & \\ \log 1{,}0257 = 0{,}01102 & \\ \hline 1{,}96170 & + \\ \log 3{,}5603 = 0{,}55149 & \\ \hline \log x = 1{,}41021 & - \\ x = 25{,}7165. & \end{array}$$

3. Bereken: $x = \sqrt[7]{\frac{0{,}5619^2}{3{,}5921^3}}$.

$$\log x = \tfrac{1}{7}\,\{2 \log 0{,}5619 - 3 \log 3{,}5921\}.$$

$$\begin{array}{lrl} \log 0{,}5619 = 0{,}74966 - 1 & 2 & -3 \\ \hline & \times 2 = & \not 1{,}49932 - \not 2 \\ \log 3{,}5921 = 0{,}55535 & & \\ \hline & \times 3 = & 1{,}66605 \\ \hline & & 0{,}83327 - 3; \end{array}$$

dus $\log x = \frac{1}{7}\,(0{,}83327 - 3)$.

Ten einde bij $\log x$ steeds een geheel getal als wijzer te krijgen, maken wij hiervan:

$$\log x = \tfrac{1}{7}\,(4{,}83327 - 7) =$$
$$= 0{,}69047 - 1$$
$$x = 0{,}49031.$$

4. Bereken: $x = \sqrt[36]{1{,}562^{31}}$.

$$\log x = \tfrac{31}{36} \log 1{,}562 = \tfrac{31}{36} \times 0{,}19368.$$

$$\log \log x = \log 31 + \log 0{,}19368 - \log 36.$$

$$\begin{array}{rl} \log 31 = 1{,}49136 & \\ \log 0{,}19368 = 0{,}28709 - 1 & \\ \hline 1{,}77845 - 1 & + \\ \log 36 = 1{,}55630 & \\ \hline \log \log x = 0{,}22215 - 1 & - \\ \log x = 0{,}16678 & \\ x = 1{,}46817 & \end{array}$$

OPGAVEN.

§ **39.** 1. Bereken: $41{,}42 \times 5{,}619$; $6{,}149 \times 0{,}001425$; $14{,}14 \times 0{,}8816$.

2. $\dfrac{71{,}415}{13{,}15}$; $\dfrac{19{,}612}{1{,}409}$; $\dfrac{0{,}8612}{0{,}9266}$.

3. $1{,}07^{8}$; $2{,}02^{12}$; $0{,}98916^{3}$; $0{,}04195^{4}$.

4. $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[4]{1{,}65}$; $\sqrt[5]{861}$; $\sqrt[7]{186400000}$.

5. $6{,}223 \times 1{,}796 \times 0{,}9251$; $0{,}01732 \times 0{,}001792 \times 89{,}162$.

6. $5{,}678^{2} \times 2{,}103^{2} \times 0{,}2543$; $0{,}2315 \times 2{,}394 \times 0{,}0157^{3}$.

7. $0{,}014991^{4} \times 19{,}42^{5} \times 1{,}11256^{7}$; $7{,}302^{14} \times 0{,}7302^{3} \times 0{,}007302^{2}$.

8. $\dfrac{2{,}803}{0{,}0634}$; $\dfrac{2391 \times 3072}{2417 \times 719}$; $\dfrac{0{,}01254 \times 4{,}105}{30{,}56}$.

9. $\dfrac{1{,}9273 \times 0{,}2501^{2}}{2{,}3945}$; $\dfrac{17{,}563 \times 0{,}2632}{0{,}97302^{3}}$.

10. $\sqrt[8]{2\tfrac{1}{5}}$; $\sqrt[5]{3{,}279}$; $\sqrt[5]{1{,}2345^{6}}$; $\sqrt[13]{27{,}8256^{2}}$.

11. $\sqrt{0{,}2}$; $\sqrt[4]{0{,}07}$; $\sqrt[5]{0{,}51}$; $\sqrt{0{,}051379}$.

12. $\dfrac{1}{2{,}5702}$; $\dfrac{1}{3{,}58 \times (0{,}0723)^{2}}$; $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5{,}001}}$.

13. $\left(\sqrt[3]{\dfrac{2{,}943 \times 1{,}2501}{0{,}4232 \times 0{,}92593}}\right)^{2}$; $\dfrac{(330{,}25 \times \frac{1}{49})^{4}}{\sqrt[3]{22{,}5 \times 7{,}01}}$.

14. $\sqrt{\dfrac{0{,}678 \times 9{,}0125}{\sqrt[3]{0{,}02345}}}$; $\dfrac{2{,}7951 \times \sqrt[3]{0{,}172956}}{0{,}08753 \times \sqrt{9{,}2876}}$.

15. Bepaal de middelevenredige tusschen $\sqrt[3]{2{,}775}$ en $\sqrt[5]{30{,}08}$.

16. Bepaal de 4e evenredige tot:
$\sqrt[3]{32{,}78}$; $\sqrt[5]{357{,}81}$ en $\sqrt[4]{7836{,}25}$.

17. $\dfrac{21{,}589 \times 0{,}00376}{0{,}0432} \times \dfrac{7{,}632 \times 6{,}469}{\sqrt{89{,}13}}$.

18. Bepaal:
log log 25,32; log log 3,2564; log log 9,2353.

19. Bepaal x uit:
$\log\log x = 0{,}17609 - 1$; $\log\log x = 0{,}83935 - 2$;
$\log\log x = 0{,}68723$; $\log\log\log x = 0{,}00478 - 3$.

20. Bereken:
$5{,}163^{1{,}24}$; $2{,}0125^{4{,}735}$; $\sqrt[1{,}987]{79{,}374}$; $\sqrt[13{,}56]{9{,}8643}$.

21. Bepaal:
${}^{5}\log 6$; ${}^{25}\log 13$.

22. Hoeveel nullen staan er aan den linkerkant van $0{,}6^{50}$?

23. Bepaal de eerste 4 cijfers van 2^{100}.

24. Bereken de oppervlakte van een driehoek met zijden 17,142 M; 19,186 M en 23,15 M.

25. Bereken de bissectrice van den kleinsten hoek van $\triangle$ ABC, als bekend zijn $a = 7{,}482$, $b = 6{,}415$ en $c = 5{,}213$.

26. Men vraagt den straal van den om- en ingeschreven cirkel van $\triangle$ ABC, als $a = 19{,}142$ $b = 16{,}102$, $c = 20{,}866$.

27. $a)$ $\sqrt{4{,}1634^2 - 1{,}8225^2}$; $b)$ $\sqrt[6]{5{,}864^2 - 4{,}136^2}$.

28. $\sqrt[3]{1{,}2357^2 + 0{,}45652^2}$.
Stel $1{,}2357^2 = x$ en $0{,}45652^2 = y$ en bereken eerst x en y afzonderlijk.

29. $\sqrt[3]{\dfrac{2{,}5721 + \sqrt[3]{1{,}5006^4}}{\sqrt[5]{2{,}3336^2}}}$.

30. Bereken:
$$\sqrt{\frac{1{,}7019\sqrt{5{,}6222} + \sqrt[3]{2{,}5709}}{\sqrt{7{,}5601} - \sqrt[5]{2{,}5656}}}.$$

§ **40.** In § 30 hebben we opgemerkt, dat negatieve getallen geen logarithme hebben; toch kunnen we wel met logarithmen vormen uitrekenen, waarin negatieve getallen voorkomen. Een voorbeeld zal het best toelichten, hoe men in een dergelijk geval moet handelen.

Zij gevraagd te berekenen:
$$x = \frac{(-2{,}587)^3 \sqrt[3]{0{,}2531}}{\sqrt[7]{(-2{,}3516)^4}}.$$

De teller van deze breuk is negatief, de noemer positief; de breuk zelf is dus negatief. We mogen dus ook schrijven:

$$x = -\frac{2{,}587^3 \sqrt[3]{0{,}2531}}{\sqrt[7]{2{,}3516^4}}$$

of:

$$-x = \frac{2{,}587^3 \sqrt[3]{0{,}2531}}{\sqrt[7]{2{,}3516^4}}.$$

We kunnen nu $-x$ met behulp van logarithmen berekenen:

$$\log(-x) = 3\log 2{,}587 + \tfrac{1}{3}\log 0{,}2531 - \tfrac{4}{7}\log 2{,}3516$$

$$\begin{array}{lll}
\log 2{,}587 = 0{,}41280 & & \\
\qquad \overline{\phantom{0{,}41280}} \times 3 = 1{,}23840 & & \\
\log 0{,}2531 = 0{,}40329 - 1 & & \\
\qquad 3\overline{\phantom{0{,}40329 - 1}} = 0{,}80110 - 1 & & \\
\qquad\qquad \overline{\phantom{0{,}80110 - 1}}\; + & & \\
\qquad\qquad 1{,}03950 & & \\
\log 2{,}3516 = 0{,}37136 & & \\
\qquad \overline{\phantom{0{,}37136}} \times \tfrac{4}{7} = 0{,}21221 & & \\
\qquad\qquad \overline{\phantom{0{,}21221}}\; - & & \\
\log(-x) = 0{,}82729 & & \\
-x = 6{,}7188 & & \\
x = -6{,}7188 & &
\end{array}$$

We kunnen uit dit voorbeeld zien, dat we eerst het teeken van den te berekenen vorm bepalen; wanneer dit teeken negatief is, berekenen wij $-x$ en kunnen nu alle minteekens in den vorm weglaten.

Zij nog gevraagd te berekenen:

$$x = \sqrt[2374]{0{,}09132^{164{,}31}}$$

$$\log x = \frac{164{,}31}{2374} \times \log 0{,}09132$$

$$= \frac{164{,}31}{2374} \times (9{,}96057 - 2)$$

$$= -\frac{164{,}31}{2374} \times 1{,}03943$$

$$-\log x = \frac{164{,}31}{2374} \times 1{,}03943; \text{ stel dit } y;$$

$$\log y = \log 164{,}31 + \log 1{,}03943 - \log 2374$$

$$
\begin{array}{rl}
\log 164{,}31 = & 2{,}21567 \\
\log 1{,}03943 = & 0{,}01680 \\
\hline
& 2{,}23247 \quad + \\
\log 2374 = & 3{,}37548 \\
\hline
\log y = & 0{,}85699 - 2 \quad - \\
y = -\log x = & 0{,}07194 \\
\log x = & -0{,}07194 \\
= & 0{,}92806 - 1 \\
x = & 0{,}84734.
\end{array}
$$

OPGAVEN.

§ **41.** Bereken x uit:

1. $x = \dfrac{-1{,}2345 \times (-2{,}3571)^4}{(-5{,}0207)^2}$.

2. $x = \dfrac{-5{,}2971^2 \times \sqrt{1{,}6903}}{\sqrt[3]{-2{,}5692}}$.

3. $x = \sqrt[24]{0{,}091275}$.

4. $x = \sqrt[175]{0{,}0098713^{43}}$.

5. $x = \sqrt[8{,}437]{0{,}287932^{5{,}2965}}$.

6. $x = \sqrt[15]{\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[8]{256^2}}}$.

7. $x = \sqrt[6]{0{,}94517 - 0{,}04548}$.
   Bepaal ook x^x.

8. $x = 1{,}28074 + \dfrac{\sqrt[3]{(\log 0{,}765)}}{0{,}31426^2}$.

9. $x = \dfrac{\sqrt[5]{(-0{,}04314)^2} \times \sqrt[4]{(+0{,}28168)^3}}{\sqrt[3]{(-0{,}00276)}}$.

10. Los met behulp van logarithmen op:
$$(0{,}2)^x = \sqrt{(a^2 - b^2)},$$
waarin $a = 273{,}075$ en $b = 272{,}985$.

11. Eveneens:
$$x^{\sqrt{3}} = \frac{0{,}06}{\sqrt[3]{0{,}6}}.$$

12. Bereken x uit:

$$\log x = \frac{\sqrt[5]{a^3}}{b^4},$$

wanneer: $a = -0{,}035415$ en $b = -1{,}24579$.

13. Bereken:

$$x = \sqrt[4]{\{0{,}05793^{-1{,}8679} - 0{,}8425^{3{,}628}\}}.$$

14. Bereken x als gegeven is:

$${}^{x}\log 5{,}6789 = -0{,}83022.$$

15. Bereken:

$$x = \sqrt[208{,}43]{0{,}0035724^{0{,}094872}}.$$

EXPONENTIAAL-VERGELIJKINGEN.

§ **42.** Bij de machtsverheffing begint men met het grondtal a te geven, benevens den exponent b; uit de bewerking volgt dan de macht; men heeft nl. $a^b = c$; bij de machtsverheffing treden alzoo drie grootheden op; de omgekeerden worden nu gevonden door een der beide gegeven grootheden als onbekend aan te nemen, de andere en de uitkomst als bekend; beide omgekeerden liggen dus opgesloten in:

$$x^b = c, \text{ waaruit volgt } x = \sqrt[b]{c},$$

en $a^x = c$, waar de onbekende als exponent voorkomt.

Vergelijkingen, waarbij de onbekende(n) als exponent voorkomen, heeten **exponentiaalvergelijkingen.**

Het type ervan is $a^x = c$; deze vergelijking kan alleen eenvoudig opgelost worden met behulp van het vroeger geleerde, als het tweede lid geschreven kan worden als een macht van a met een meetbaren exponent; men heeft dan $a^x = a^p$, waaruit volgt $x = p$; is echter, zooals in $(2x - 3)^{4x+1} = (2x - 3)^{15}$ ook het grondtal een vorm, die de onbekende bevat, dan wordt aan de vergelijking zoowel voldaan door te stellen $2x - 3 = 1$, want $1^{4x+1} = 1^{15}$, als door $4x + 1 = 15$.

OPGAVEN.

§ **43.** Tot welke vergelijkingen geven de volgende exponentiaal-vergelijkingen aanleiding?

1. $a^{4(2x-1)} = a^{7-4x}$; $\quad a^{2x} \times a^{4x-3} = a^{1-4x}$.
2. $b^{7x-1} = b^{x-1} : b^{2x+5}$; $\quad (b^{2-5x} : b^{2-4x}) : b^{2-3x} = b$.
3. $c^{2y-4} : c^{4-3y} = \dfrac{1}{c^2}$; $\quad c^{4-y} : c^{-4} = c^0 : \dfrac{1}{c^5}$.
4. $\sqrt[4]{d^{5x+6}} : \sqrt[6]{d^{7x+5}} = \sqrt[12]{d^{5x-8}}$; $\quad d^{\frac{x}{4}} : \sqrt[6]{d^{5x+8}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{d^{9-2x}}}$.

5. $\begin{cases} a^{6x} : a^{4y} = a^{11} \\ a^{3x} \times a^{2y} = a^{27}; \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} (a^x)^9 = (a^4)^{13} \times (a^5)^y \\ (a^8)^y = a^8 \times (a^3)^x. \end{cases}$

6. $\begin{cases} a^{5x} \,.\, a^{6y} \,.\, a^{2z} = \dfrac{1}{a^{10}} \\ (a^8)^x = a^5 \times (a^y)^7 \\ a^x = a^{25} \times (a^9)^y; \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} \sqrt[x]{d} : \sqrt[y]{d^2} = \dfrac{1}{d^4} \\ \sqrt[x]{d} : \sqrt[z]{d} = \dfrac{1}{d} \\ \sqrt[z]{d^2} \times \sqrt[x]{d^3} = (d^2)^7. \end{cases}$

7. $\sqrt[x+1]{p} : \sqrt[3-x]{p} = \sqrt[35]{p^6}$; $\qquad \sqrt[x-2]{q^5} = \sqrt[x]{q^4} \times \sqrt[x+6]{q^3}$.

8. $\sqrt[x-2]{r^{x-2}} \times \sqrt[x-4]{r^{3x-11}} = \sqrt[x+1]{r^{4x+13}}$; $\qquad \sqrt[x+a]{s} = \sqrt[x]{s^{x+a}} \,.\, s\sqrt{s}$.

Los de volgende vergelijkingen op:

9. $8^x \times 2^{15} = (2^4)^5 \times 4^x$; $\qquad 16^{3x-2} = 4^{4x-3} \times 8^{4-x}$.

10. $(\sqrt{2})^{5x+4} : \sqrt[5]{(\sqrt{2})^{7x+5}} = 32 \sqrt[5]{8} \times (\sqrt{2})^{1-x}$.

11. $9^{x-a} \times 27^{x-2a} = (3^a)^2$; $(\sqrt{3})^{a+x} \times (\sqrt[3]{3})^{2a+x} \times (\sqrt[4]{3})^{3a+x} = 27^a$.

12. $\sqrt[3-x]{10} \times \sqrt[2x-9]{10} = \sqrt[5]{10000}$; $\sqrt[x-1]{\frac{1}{81}} : \sqrt[x+2]{\frac{1}{243}} = \sqrt[x]{\frac{1}{27}}$.

13. $(3x - 1)^{2x} = (3x - 1)^{1+6x}$;

$(9x^2 - 6x - 23)^x = (9x^2 - 6x - 23)^{4+5x}$.

14. $(x^2 - 35x - 199)^{\frac{1}{x}} = (x^2 - 35x - 199)^{\frac{1}{2x}+5}$.

$(x^2 + 8cx - 9c^2)^{\frac{4}{x}+2} = (x^2 + 8cx - 9c^2)^{\frac{4}{x}+1}$.

§ **44.** In het bovenstaande hadden we steeds in beide leden machten van eenzelfde grondtal of konden die onmiddellijk krijgen; ligt het grondtal niet voor de hand, dan neme men daarvoor het getal 10, b.v. $3^x = 7$; 3 is nl. $10^{\log 3}$ en $7 = 10^{\log 7}$; men vindt aldus $10^{x \log 3} = 10^{\log 7}$ of $x \log 3 = \log 7$; gewoonlijk zegt men in dat geval eenvoudigweg: **neem van beide leden de logarithme;** uit $a^x = c$ vindt men dan $x \log a = \log c$ en $x = \dfrac{\log c}{\log a}$.

Men vindt dus de oplossing van het type van exponentiaalvergelijkingen $a^x = c$ steeds door logarithmen; in het 1e geval namen we a of een macht van a als basis, in het tweede de basis 10 van het Briggsche logarithmenstelsel. Wij geven eenige eenvoudige voorbeelden:

I. $7^x = 19$; $x \log 7 = \log 19$, waaruit $x = \frac{\log 19}{\log 7} = \frac{1,27875}{0,84510}$;
deze breuk berekent men het eenvoudigst met verkorte deeling; men kan het natuurlijk ook doen met logarithmen:

$$\log 1,27875 = 1,10678 - 1$$
$$\log 0,84510 = 0,92691 - 1$$
$$\log x = 0,17987$$
$$x = 1,5131.$$

II. $7^x = 3$; $x \log 7 = \log 3$; $x = \frac{\log 3}{\log 7} = \frac{0,47712}{0,84510} = 0,56457.$

III. $7^x = 0,15$; $x \log 7 = \log 0,15$; $x = \frac{\log 0,15}{\log 7} = \frac{0,17609 - 1}{0,84510} =$
$$= -\frac{0,82391}{0,84510} = -0,97494.$$

IV. $0,7^x = 8$; $x \log 0,7 = \log 8$; $x = \frac{\log 8}{\log 0,7} = \frac{0,90309}{0,84510 - 1} =$
$$= -\frac{0,90309}{0,15490} = -5,8302.$$

V. $0,7^x = 0,02$; $x \log 0,7 = \log 0,92$; $x = \frac{\log 0,92}{\log 0,7} = \frac{0,96379 - 1}{0,84510 - 1} =$
$$= \frac{0,03621}{0,15490} = 0,23376.$$

VI. $0,7^x = 0,025$; $x \log 0,7 = \log 0,025$; $x = \frac{\log 0,025}{\log 0,7} =$
$$= \frac{0,39794 - 2}{0,84510 - 1} = \frac{1,60206}{0,15490} = 10,346.$$

Men wachtte zich er voor aldus te werk te gaan:

$0,7^x = 0,025$; $x = \frac{\log 0,025}{\log 0,7}$, dus $\log x = \log \log 0,025 - \log \log 0,7$.

enz. Dit zou aanleiding geven tot onbegrepen werk en daardoor tot menigvuldige fouten.

VII. $0{,}86^x = 9{,}5^{2-x}$. Men neemt van beide leden de logarithme en vindt:

$$x \log 0{,}86 = (2 - x) \log 9{,}5$$

$$x(\log 0{,}86 + \log 9{,}5) = 2 \log 9{,}5, \text{ waaruit } x = \frac{2 \log 9{,}5}{\log 0{,}86 + \log 9{,}5} =$$

$$= \frac{1{,}95544}{0{,}91222} = 2{,}1436.$$

VIII. $\sqrt[x]{0{,}3^{2x-1}} = \sqrt[3]{0{,}5^{x-2}}$

$$0{,}3^{\frac{2x-1}{x}} = 0{,}5^{\frac{x-2}{3}}$$

$$\frac{2x-1}{x} \log 0{,}3 = \frac{x-2}{3} \log 0{,}5 \quad \times 3x$$

$$(6x - 3) \log 0{,}3 = (x^2 - 2x) \log 0{,}5$$

$$x^2 \log 0{,}5 + 2x(3 \log 0{,}3 - \log 0{,}5) - 3 \log 0{,}3 = 0.$$

$$x^2 \log 0{,}5 + 2x \log \frac{0{,}027}{0{,}5} - \log 0{,}027 = 0.$$

$$x^2 \log 0{,}5 + 2x \log 0{,}054 - \log 0{,}027 = 0.$$

$$x^2(0{,}69897 - 1) + 2x(0{,}73239 - 2) - (0{,}43136 - 2) = 0.$$

$$x^2 \times 0{,}30103 + 2x \times 1{,}26761 - 1{,}56864 = 0.$$

Deze vierkantsvergelijking losse men op de bekende manier op:

$$x = \frac{-1{,}26761 \pm \sqrt{1{,}6068 + 0{,}47221}}{0{,}30103} = \frac{-1{,}26761 \pm 1{,}4419}{0{,}30103}$$

$$x_1 = \frac{-1{,}26761 + 1{,}4419}{0{,}30103} = 0{,}6122$$

$$x_2 = \frac{-1{,}26761 - 1{,}4419}{0{,}30103} = -9{,}001.$$

OPGAVEN.

§ 45. Bereken de onbekenden uit:

1. $19^x = 5123$; $\quad 19^x = 5{,}123$; $\quad 19^x = 0{,}05123$.
2. $\left(\frac{111}{700}\right)^{x-2} = 0{,}11$; $\quad \left(\frac{111}{700}\right)^{x-2} = 0{,}011$; $\quad \left(\frac{111}{700}\right)^{x-2} = 11$.

3. $(1\tfrac{17}{61})^{4+x} = (17\tfrac{1}{6})^{2x}$; $\qquad 11^{2x} = 4^{2x} \times 5^{3x-1}$.

4. $\dfrac{2^{3+x}}{3^{5+2x}} = \dfrac{4^{6+3x}}{5^{7+4x}}$; $\qquad \sqrt[x]{2^{3x-1}} = \sqrt[x-2]{3^{4x}}$.

5. $\sqrt[x+2]{3} = 4^{2+3x}$; $\qquad 43 \times (0{,}0478)^{5x^2} = 1{,}2473$.

6. $x^{\log x} = 13$; $\qquad x^{3+\log x} = 17$.

7. $(3x)^{\log^2 x - 6 \log x} = 1$; $\qquad \dfrac{x^{\log x}}{x^3} = \dfrac{1}{0{,}001}$.

8. $10^{\log^2 x - 8 (\log x - 2)} = (1000x)^2$; $\qquad x^{\log^2 x} = 0{,}001$.

9. $x^{5+\log x} = 12$; $\qquad \dfrac{x^{\log 3x}}{2(x^{\log 2x})} = 5$.

10. $\begin{cases} 2^x \,.\, 3^y = 59; \\ 4^x \,.\, 5^y = 16; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3^{2x} \,.\, 4^{3y} = 190. \\ 9^x \,.\, 5^{2y} = 20. \end{cases}$

§ **46**. We moeten opmerken, dat van alle vraagstukken uit de §§ 43 en 45 beide leden eentermen zijn; dit is natuurlijk het eenvoudigst, want alleen voor het geval, dat men met producten, quotiënten, machten en wortels te doen heeft, kan men met logarithmen wat uitvoeren; heeft men dus opgaven, waarin **sommen of verschillen** voorkomen, dan is het noodig eerst beide leden **logarithmisch te maken** (dat is te herleiden tot vormen, die met logarithmen gemakkelijk kunnen worden uitgewerkt) of door het **stellen van een nieuwe onbekende** het vraagstuk tot het algemeene type $a^x = b$ terug te voeren. Daar deze bewerkingen dikwijls niet voor de hand liggen, willen we een paar voorbeelden geven.

I. Logarithmisch maken; dit doet men enkel als in de vergelijking machten van twee grondtallen voorkomen:

a. $5^{2x+1} + 3^{x-1} = 3^{x+1} + 5^{2x-1}$.
$5^{2x+1} - 5^{2x-1} = 3^{x+1} - 3^{x-1}$.
$5^{2x-1}(5^2 - 1) = 3^{x-1}(3^2 - 1)$.
$5^{2x-1} \,.\, 3 = 3^{2x-1}$ of $5^{2x-1} = 3^{x-2}$ enz.

b. $9^x + 3^{2x+1} + \frac{1}{81} \,.\, 9^{3+x} = 2^{4x} + 4^{2x+1} + 16^{x+1}$.
$3^{2x} + 3^{2x+1} + 3^{6+2x} : 3^4 = 2^{4x} + 2^{4x+2} + 2^{4x+4}$.
$3^{2x}(1 + 3 + 9) = 2^{4x}(1 + 4 + 16)$.
$9^x \,.\, 13 = 16^x \,.\, 21$, enz.

c. $4^x - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$.

$2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x-1/2} + 3^{x+1/2}$.

$2^{2x-1}(2+1) = 3^{x-1/2}(1+3)$.

$2^{2x-1} . 3 = 3^{x-1/2} . 4$.

$2^{2x-3} = 3^{x-1\frac{1}{2}}$.

$2^{2x-3} = (\sqrt{3})^{2x-3}$, waaruit volgt $2x - 3 = 0$; $x = 1\frac{1}{2}$.

II. Stellen van nieuwe onbekenden:

a. $\dfrac{2^{2x+1} - 3}{2^{x+2} + 5} = 4$. Stel $2^{x+1} = y$.

b. $5^x + 7.25^{x-1} = 9$ of $5^x + 7.5^{2x-2} = 9$.
Stel $5^x = y$, dan is $y + \frac{7}{25}y^2 = 9$ enz.

c. $x^{\log x} + 3x^{-\log x} = 15$. Stel $x^{\log x} = y$, dan is $x^{-\log x} = y^{-1}$; men vindt dan $y + 3y^{-1} = 15$, of $y^2 + 3 = 15y$.

d. $2^{2x-3} - 4^{-x+1} = 9$, of $2^{2x-3} - 2^{2-2x} = 9$. Stel $2^{2x} = y$.

e. $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-\log x} - 5\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-1/2 \log x} = 24$. Stel $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-\log x} = x^{\log x} = y^2$,
dan heeft men $y^2 - 5y - 24 = 0$.

OPGAVEN.

§ **47.** Los de onbekenden op uit:

1. $2^{6x} + 4^{3x+1} + 8^{2x+2} = 27^x + 9^{1\frac{1}{2}x} + 3^{3x}$;
$3^{5x} + (\sqrt{3})^{10x} + (3\sqrt{3})^{3\frac{1}{3}x} = 2^{5x} + 32^x$.

2. $6^{2x} - 7^{2x} = 36^{x-1} + 49^x$; $\sqrt[x]{1\frac{1}{2}} + 4\frac{1}{2}\sqrt[2x]{\frac{9}{4}} = 5$.

3. $\dfrac{3^x + 12}{3^x + 1} = 5$; $\dfrac{5^x + 5^{-x}}{1 - 5^{-x}} = \dfrac{1}{5^x}$; $\dfrac{5(x^{-\log x}) + 1}{x^{-\log x} + 2} = x^{\log x}$.

4. $32^{\frac{x+1}{x-1}} + 256^{\frac{x}{x-3}} = \frac{1}{2}$; $3 \times 4^x + \frac{1}{3} \times 9^{x+2} = 6 \times 4^{x+1} - \frac{1}{2} \times 9^{x+1}$.

5. $2^{2^x} - 2^{2^{x-1}} = 3$; $6^{4x} + 6^{2(x+1)} = 2592$.

6. $(710,2)^{4x} = 11$; $(3,14258)^{x^2+8x-4} = 3,87365$.

7. $3^{2x} \times 5^{6x-7} = 9^{x-2} \times 7^{1-x}$; $10^{(\log 2)^x} = 16$.

8. $625^{\frac{2x+1}{x+2}} : 15625^{\frac{4x-3}{5x-4}} = 0{,}04$; $\frac{(x+1)^{\log(x+1)}}{(x+1)^3} = 0{,}01$.

De volgende vergelijkingen zijn ontstaan door van beide leden eener vergelijking de logarithme te nemen; breng ze tot de oorspronkelijke gedaante terug en werk ze uit:

9. $\log x + \log(x+3) = 1$; $\log x^2 + \log x = 2$.

10. $\log(1-2x)^3 - \log(3-x)^3 = 6$;
$\frac{1}{3}\log(x+5) = \frac{1}{6}\log(x^2+15x+10)$.

REKENKUNDIGE REEKSEN.

§ 48. Een rij getallen, die vanaf een zekeren term volgens een bepaalde wet gevormd worden, heet een **reeks**; de getallen heeten de termen der reeks en het getal, dat aanwijst, de hoeveelste het is van voren af aan, heet het **ranggetal**; dit wordt aangewezen door n en de n^e term wordt kortweg aangeduid door t_n; voorbeelden zijn:

a.	4, 12, 20, 28, 36, 44, ...	$t_n = t_{n-1} + 8.$
b.	3, 6, 12, 24, 48, 96, ...	$t_n = 2 \times t_{n-1}.$
c.	1, 4, 9, 16, 25, 36, ...	$t_n = n^2.$
d.	— 9, — 2, 17, 54, 115, 206, ...	$t_n = n^3 - 10.$
e.	4, 3, 13, — 4, 173, ...	$t_n = t_{n-2}^2 - t_{n-1}.$
f.	$\frac{1}{1.2}, \frac{1}{2.3}, \frac{1}{3.4}, \frac{1}{4.5}, \frac{1}{5.6}, \ldots$	$t_n = \frac{1}{n(n+1)}.$

Dit aantal kan natuurlijk vermeerderd worden; we kunnen ons echter niet met al deze reeksen ophouden, doch nemen enkel de twee allereenvoudigste en wel eerst die onder a genoemd, waarbij, te beginnen met den tweeden, elke term uit den vorigen gevonden wordt door eenzelfde getal, bij te tellen; we noemen ze **rekenkundige reeksen;** het getal, dat men optelt kan positief en negatief zijn, zoodat de reeks voortdurend grootere of kleinere, getallen vertoont:

25, 29, 33, 37, 41, 45, ... is een opklimmende reeks.
25, $24\frac{1}{4}$, $23\frac{1}{2}$, $22\frac{3}{4}$, 22, ... „ „ afdalende reeks.

De eerste term wordt altijd a (aanvangsterm) genoemd, het getal, hetzij positief, hetzij negatief, dat men voortdurend optelt heet v (verschil), het aantal termen n en daar men de rij ergens laat eindigen, de laatste term l; verder stelt men nog de som

der termen voor door s; van de reeks 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35 zijn dus $a=2$, $v=3$, $n=12$, $l=35$ en $s=222$.

Om een reeks te bepalen zal men natuurlijk beginnen met den eersten term te zeggen, verder wat er telkens bijgeteld moet worden en hoeveel termen men wenscht te nemen; daardoor is dan de laatste bepaald en daarmee ook de som van alle termen; l wordt heel eenvoudig gevonden:

$$t_2 = t_1 + v \text{ of } a + v$$
$$t_3 = t_2 + v \text{ of } a + v + v = a + 2v.$$
$$t_4 = t_3 + v \text{ of } a + 2v + v = a + 3v.$$

Enkel uit de bepaling van rekenkundige reeks volgt dus:

$$\boldsymbol{l = t_n = a + (n-1)\,v.}$$

Ook de som kan heel eenvoudig gevonden worden als volgt:

$$s = a + (a+v) + (a+2v) + \ldots\ldots\ldots + (l-v) + l$$
$$s = l + (l-v) + (l-2v) + \ldots\ldots\ldots + (a+v) + a.$$
$$2s = (a+l) + (a+l) + (a+l) + \ldots\ldots + (a+l) + (a+l).$$
$$\text{of } 2s = n\,(a+l) \text{ en } \boldsymbol{s = \tfrac{1}{2}n\,(a+l)}.$$

We kunnen dit bewijs ook anders geven nl. door op te merken, **dat de som van 1e en ne gelijk is aan die van 2e en $(n-1)$e** en aan die van 3e en $(n-2)$e, enz., waardoor men bij een even aantal termen voor de som krijgt, $s = \frac{1}{2}n\,(a+l)$ en bij een oneven aantal $\frac{1}{2}(n-1)\,(a+l) +$ middelste, die echter evenveel meer is dan de eerste als minder dan de laatste en dus $\frac{1}{2}(a+l)$; ook dan is de som $\frac{1}{2}(n-1)\,(a+l) + \frac{1}{2}(a+l) = \frac{1}{2}n\,(a+l)$.

OPGAVEN.

Zoek l en s bij de volgende reeksen:

1. 1, 3, 5 tot 7 termen; 60, 53, 46 tot 9 termen.
2. 12, 8, 4 tot 11 „ ; 4, $5\frac{1}{4}$, $6\frac{1}{2}$ tot 13 „ .
3. $3a$, $5a$, $7a$ tot 37 „ ; $\frac{1}{2}$, -1, $-2\frac{1}{2}$ tot 23 „ .
4. 5,3; 6,1; 6,9 tot 19 „ ; 9, 11, 13 tot n „ .

5. $3\sqrt{5}$, $4_{1}{}^{2}{}_{3}\sqrt{5}$, $5_{1}{}^{4}{}_{3}\sqrt{5}$ tot 14 termen; a, $2a$, $3a$, ... tot n termen.
6. $2c$, $2c+4d$, $2c+8d$ tot 14 „ ; $\frac{a-c}{2}$, $\frac{c}{2}$, $\frac{3c-a}{2}$ tot 10 „ .
7. $\frac{n-1}{n}$, $\frac{n-2}{n}$, $\frac{n-3}{n}$ tot n „ ; $\frac{c-1}{c}$, $\frac{c-3}{c}$, $\frac{c-5}{c}$ tot n „ .
8. $\frac{p-q}{3}$, $\frac{p}{3}$ tot $p+q$ „ ; $\frac{n^2}{n}$, $\frac{n^2-n}{n}$, ... tot n^2 „ .

§ 49. Daar in elk der formules $l=a+(n-1)v$ en $2s=n(a+l)$ vier van de vijf grootheden voorkomen, zal men telkens bij het geven van drie der vijf de 4e en 5e kunnen uitrekenen door de drie gegevene in de formules te substitueeren; tevens blijkt, dat men 10 vraagstukken kan maken; men kan nl. vragen naar a & v, a & n, a & l en a & s; naar v & n, v & l en v & s; naar n & l en naar n & s en nog naar l & s.

OPGAVEN.

Vul de open plaatsen in:

	a	v	n	l	s
1.	......	......	13	31	-169
	......	......	19	$-\frac{3}{5}$	0
2.	......	$\frac{3}{4}$	...	41	1127
	......	$\frac{13}{45}$	...	$\frac{4}{3}$	$-\frac{40}{3}$
3.	......	$\frac{1}{2}$	17	......	17
	......	$-2\frac{1}{2}$	38	......	$-1{,}6625$
4.	......	5	14	0	....
	......	$\frac{1}{8}$	20	$2\frac{7}{8}$	....
5.	46	......	...	58	260
	$-2\frac{1}{2}$	......	...	$-11\frac{1}{2}$	-91
6.	$-\frac{3}{4}$	......	7	......	-7
	0	......	30	......	$290x$
7.	$2\frac{3}{5}$	......	5	$-1{,}9$	....
	$2c^2$	......	35	$2c^2+17d$	....
8.	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	...	......	3
	2	-3	...	......	-328
9.	$116\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{4}$	...	0	....
	$-5\frac{1}{3}$	$-\frac{7}{5}$	...	$-101\frac{14}{15}$	....
10.	$3c-17b$	$c+\frac{1}{2}b$	10	......	....
	$12p-q$	$\frac{1}{3}q-\frac{1}{4}p$	136	......	....

Had men in bovenstaande vraagstukken niet de gegevens in getallen gezegd, dan was toch de oplossing niet veel moeilijker geworden; steeds toch krijgt men eenvoudige vergelijkingen ter berekening van de onbekende grootheden en wel:

1. $l' = a + (n' - 1)\,v$ en $2s' = n'\,(a + l')$; dit zijn 2 verg. met de twee onbekenden a en v; a wordt uit de tweede opgelost en gesubstitueerd in de eerste, teneinde v uit te drukken in n', l' en s'.

2. $l' = a + (n - 1)\,v'$ en $2s' = n\,(a + l')$; dit zijn twee vergelijkingen met 2 onbekenden; substitueer $a = l' - (n - 1)\,v'$ in de tweede om n te vinden en $n = \dfrac{2s'}{a + l'}$ uit de tweede in de eerste om a op te lossen.

5. $l' = a' + (n - 1)\,v$ en $2s' = n\,(a' + l')$; n wordt uit de 2[e] verg. gevonden nl. $\dfrac{2s'}{a' + l'}$; substitutie daarvan in de eerste geeft een vergelijking ter bepaling van v.

8. $l = a' + (n - 1)\,v'$ en $2s' = n\,(a' + l)$; dit zijn weer twee vergelijkingen met twee onbekenden; door de substitutie van $l = a' + (n - 1)\,v'$ in de 2[e] ontstaat de vergelijking:

$$2s' = n\,\{a' + a' + (n - 1)\,v'\}, \text{ of}$$
$$2s' = 2na' + n^2v' - nv'$$
$$n^2v' + n\,(2a' - v') - 2s' = 0$$
$$n = \frac{v' - 2a' \pm \sqrt{(v' - 2a')^2 + 8v's'}}{2v'}.$$

Ten einde l uit te rekenen, substitueere men $n = \dfrac{2s'}{a' + l}$ uit de 2[e] in de 1[e]:

$$l = a' + \left(\frac{2s'}{a' + l} - 1\right)v'$$
$$\underline{\hspace{5cm}}\;(a' + l)$$
$$a'l + l^2 = a'^2 + a'l + (2s' - a' - l)\,v'$$
$$l^2 + lv' - a'^2 - 2s'v' + a'v' = 0$$
$$l = \frac{-v' \pm \sqrt{v'^2 + 4a'^2 + 8s'v' - 4a'v'}}{2}.$$

Alleen de vraagstukken 2 en 8 geven vierkantsvergelijkingen daar a en l in de 2[e] formule vermenigvuldigd met n voorkomen.

OPGAVEN.

1. Druk a en v uit in n, l en s.
2. „ a en n „ „ v, l en s.
3. „ a en l „ „ v, n en s.
4. „ a en s „ „ v, n en l.
5. „ v en n „ „ a, l en s.
6. „ v en l „ „ a, n en s.
7. „ v en s „ „ a, n en l.
8. „ n en l „ „ a, v en s.
9. „ n en s „ „ a, v en l.
10. „ l en s „ „ a, v en n.

§ 50. Daar de termen van een rekenkundige reeks met gelijke verschillen opklimmen of afdalen, kan men het interval tusschen elke twee termen verkleinen door een of meer termen tusschen elk tweetal in te lasschen (te interpoleeren); b.v. 2 termen in 7, 13, 19 geeft **7**, 9, 11, **13**, 15, 17, **19**; 3 termen in 12, 7, 2, **— 3** geeft **12**, $10\frac{3}{4}$, $9\frac{1}{2}$, $8\frac{1}{4}$, **7**, $5\frac{3}{4}$, $4\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{4}$, **2**, $\frac{3}{4}$, $-\frac{1}{2}$, $-1\frac{3}{4}$, **— 3**; moet men tusschen 2 termen er 2 inlasschen, dan wordt blijkbaar het nieuwe verschil $v' = \frac{v}{3}$; bij 3 termen $v' = \frac{v}{4}$; heeft men k termen in te lasschen tusschen twee termen met een verschil v, dan wordt het **nieuwe verschil** $\boldsymbol{\frac{v}{k+1}}$; men heeft nl.

$$\left.\begin{array}{l} a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad a+v \\ a, a+v', a+2v', \quad . \quad . \quad ., \quad a+kv', a+(k+1)v' \end{array}\right\}, \text{ dus } (k+1)v' = v.$$

Heeft de reeks n termen, dan wordt nu elke term (behalve de laatste) gevolgd door k nieuwe termen, zoodat er $(n-1)(k+1)+1$ termen komen; of aldus: in elk der $(n-1)$ openingen tusschen de n termen komen er k te staan, samen dus $\boldsymbol{(n-1)k+n}$.

De eerste en de laatste blijven dezelfde, de som verandert natuurlijk, daar het aantal verandert.

Opmerking. Het getal 10, dat geïnterpoleerd tusschen 7 en 13, met deze een rekenkundige reeks vormt, heet het **gemiddelde** van 7 en 13, vroeger ook wel de **rekenkundige middeleven-**

redige tusschen 7 en 13; tusschen a en b is het blijkbaar $\frac{1}{2}(a+b)$; de 4[e] **rekenkundige evenredige** tot 2, 5 en 13 is 16, want $2-5=13-16$; tot a, b en c is het dus het getal, dat men vindt door x op te lossen uit $a-b=c-x$. Men spreekt ook van de 3[e] **rekenkundige evenredige** tot a en b, als men bedoelt de 3[e] term van een reeks, waarvan a en b de eerste twee zijn; dus $a-b=b-x$ en $x=2b-a$. De namen middelevenredige en 3[e] evenredige zijn niet heel gelukkig, want er is van geen reden (verhouding, quotiënt) sprake; de laatste komt weinig meer voor en voor de eerste is „gemiddelde" beter.

OPGAVEN.

§ 51. 1. Lasch 5 termen in tusschen elk paar termen van de reeks 7, 19, 31, ... , 115 en bepaal de som der nieuwe reeks.

2. Eveneens 7 termen in een reeks, waarvan $a=-15$, $v=3$ en $n=14$ is.

3. Lasch 6 termen in tusschen $a+b$ en $8a-13b$ en bepaal de som der reeks.

4. Lasch tusschen 0 en 6 zooveel termen in, dat de som van de reeks 39 wordt.

5. Lasch 9 termen in tusschen $\frac{3}{2}$ en -11; ook 13 termen; bepaal de verhouding van de sommen dier reeksen.

6. Hoeveel termen moeten ingelascht worden tusschen $\frac{3}{5}$ en $-\frac{9}{7}$, opdat de som van de beide eerste ingelaschte termen gelijk zij aan $\frac{9}{35}$?

7. Tusschen elk paar termen van de reeks a, $a+3b$, $a+6b$, $a+9b$ lascht men k termen in; ook nog $2k+1$; men vraagt de verhouding van de sommen dier reeksen.

8. Een jongen moest eenige termen inlasschen tusschen 7 en 43, maar zette er bij ongeluk 2 te veel tusschen in; zijn eerste ingelaschte getal was nu 3 minder dan het had moeten zijn. Welke reeks kreeg hij?

9. Men lascht m termen in tusschen 1 en 31; de 7e daarvan staat tot de $(m-1)$e als $5:9$. Wat is m?

10. Tusschen 7 en 79 lascht men in x termen, $(x+2)$, $(x+4)$ en $(x+20)$ termen. De som van de 1e ingelaschte term in de 1e reeks en de laatste in de 3e reeks is even groot als de som van de 1e ingelaschte der 2e reeks en de laatste der 4e reeks. Bepaal de 4 bedoelde getallen.

11. Lasch n termen in tusschen a en b. Als tweemaal de som van de nieuwe reeks, vermeerderd met het tweevoud van de som der uitersten gelijk is aan 3 maal de som der ingelaschte termen, wat is dan n?

12. Wat is het gemiddelde van a en $\frac{an+2b-a}{n+1}$; van $(a+b)^2$ en $(a-b)^2$; van $\frac{x+y}{x-y}$ en $\frac{x-y}{x+y}$?

13. Wat is het gemiddelde van $1-x$ en $\frac{(1-x)^2}{1+x}$? Ook van $\frac{x+1}{x-1}$ en $\frac{x^3+1}{x^3-1}$?

14. a, b en c vormen een rekenkundige reeks; als x het gemiddelde is van a en b, en y idem van b en c, bewijs dan, dat a, x, b, y en c een rekenkundige reeks vormen.

15. Voor welke waarde van x is de rekenkundig middelevenredige van $x^{1/4}$ en $x^{1/2}$ gelijk aan 6?

16. Wat is het gemiddelde van log 40 en log 90; van 1 en log 49?

17. Bepaal de 3e rek. evenredige tot $(a+b)^2$ en $\frac{1}{2}(a^2+b^2)$; tot $\sqrt{2}$ en $\sqrt{50}$; tot log 3 en log 5; tot $x^{1/2}$ en x.

18. Bepaal het verschil tusschen het gemiddelde van p en q en de derde rek. ev. tot die getallen. Vormen ze in de volgorde p, m. ev., q en 3e ev. een rek. reeks?

19. Hoe zoudt ge gemakkelijk bij benadering het aantal leien bepalen van een dak, waarvan twee dakschilden gelijkbeenige driehoeken en de twee andere gelijkbeenige trapezia zijn?

20. Wat is het gemiddelde van de wortels der vierkantsvergelijkingen: $ax^2 + bx + c = 0$; $3x^2 + (b - c)x + c^2 - b^2 = 0$; $3x^2\sqrt{5} + 2x + 1 = 0$; $7x^2 - 3x\sqrt{5} + 5 = 0$?

21. Men vraagt een vierkantsvergelijking, waarvan de wortels de rek. middelev. en de rek. 3e ev. zijn van die der vergelijking $x^2 - 3ax - 3bx + 2a^2 + 5ab + 2b^2 = 0$.

GEMENGDE OPGAVEN.

§ 52. 1. Wat is de som van de eerste 41 oneven getallen? Van de eerste n? Wat is de som van de eerste 304 even getallen? Van de eerste n? Wat is de som van het 19e tot en met het 163e oneven getal? Wat van het 60e tot en met het 160e even getal?

2. Wat is de som van het n^e 3-voud tot en met het $(2n^2 + n)^e$ 3-voud? Wat is de som van het p^e 5-voud tot en met het $3p^e$ 5-voud?

3. Bepaal de som van de getallen tot 1000, die deelbaar zijn door 7; ook van de 7-vouden tusschen 500 en 2803; ook van de 7-vouden tusschen 10000 en 12000.

4. Bepaal de som der 13-vouden tusschen 1000 en 5000, die niet tevens deelbaar zijn door 5.

Ook van de 11-vouden tusschen 200 en 2000, die geen 6-vouden zijn.

5. De 4e term van een rek. reeks is 15, de 8e is 31. Hoeveel termen moet men nemen, opdat de som worde 1378?

6. Bepaal de som van een rek. reeks, waarvan de 4e term a is en de 7e b, als het totale aantal termen 3-maal de 10e term is.

7. Van een rek. reeks is de eerste term $c + 254d$, de voorlaatste $c + 2d$ en de laatste $c - 2d$. Wat is de som dier reeks?

8. Als een lichaam in de 1e seconde a M valt, in de 2e $3a$ M enz., hoeveel valt het dan in de n^e seconde? En wat is de totaal doorloopen weg?

9. A legt den 1sten dag 1 KM, den 2^{den} 2 KM enz. af; B vertrekt a dagen later met een standvastige snelheid van 6 KM per dag. Hoe lang moet A reizen voor B hem inhaalt?

In welk geval zal B A niet inhalen?

10. De 19^e term van een rek. reeks is $9x - 2y$ en de 31^e $31x - 8y$. Bepaal de som van de eerste 13 termen.

11. De som van vier termen van een rek. reeks is $10\frac{1}{2}$ en de som van hun vierkanten is $35\frac{3}{8}$. Bepaal die termen.

12. Het product van vier op elkaar volgende termen van een rekenkundige reeks vermeerderd met de vierdemacht van het verschil, is een volkomen kwadraat. Bewijs.

13. Bepaal een rek. reeks van vier termen, waarvan het product der uitersten 45, dat der middelsten 77 is.

14. Als a, b, c en d een rekenkundige reeks vormen, bewijs dan, dat $bc - ad$ steeds positief is.

15. Bepaal de som van $n + 2$ termen der reeks:

$$a, \frac{na + c}{n + 1}, \frac{(n - 1)a + 2c}{n + 1}, \ldots\ldots$$

16. Verdeel 24 in 4 deelen, die een rekenkundige reeks vormen, waarvan de som der 3^e machten 1224 is. (Stel ze $6 - 3x$, $6 - x$, ...).

17. Hoeveel termen moet men nemen van de reeks 20, 18, 16 enz., opdat de som 80 zij? Verklaar het dubbele antwoord.

18. De eerste term van een rek. reeks is 48, het verschil is -4 en de som van n termen is 300; bepaal n en verklaar het dubbele antwoord.

19. Hoeveel termen moet men nemen van de reeks 18, 15, 12, . . . , opdat de som 63 zij. Verklaar het dubbele antwoord.

20. Hoeveel termen moet men nemen van de reeks 16, 20, 24 . . . , opdat de som 120 zij? Verklaar het dubbele antwoord.

21. De eerste term van een rek. reeks is $n^2 - n + 1$ en de som van n termen is n^3; vind de laatste en het verschil. Daar $n^2 - n + 1 = n(n - 1) + 1$, is $n^2 - n + 1$ een oneven getal en leeren we hieruit, dat een volkomen derde macht steeds de som

is van zooveel oneven getallen, als het grondtal aangeeft. Van welke 7 oneven getallen is 7^3 nu de som?

22. Onderzoek, wat voor reeksen men krijgt, als men de overeenkomstige termen (1e en 1e, 2e en 2e enz.) van twee rek. reeksen optelt of aftrekt; neem de gegeven reeksen opklimmend of afdalend.

MEETKUNDIGE REEKSEN.

§ 53. Een meetkundige reeks is een rij getallen, waarbij het tweede en verder elk volgende, uit de vorige gevonden wordt door met een zelfde getal te vermenigvuldigen, b.v.:

2; 6; 18; 54; 162; 486; 1458; 4374; 13122 enz.

50000; 12500; 3125; 781,25; 190,3125; 47,578125 enz.

Als dat getal grooter is dan 1, dan spreekt men van een opklimmende reeks, in het tegenovergestelde geval van een afdalende reeks. De meeste benamingen en teekens zijn voor de meetkundige reeks dezelfde als voor de rekenkundige nl. $a =$ aanvangsterm $n =$ aantal, $l =$ laatste en $s =$ som; het getal, waarmee men telkens vermenigvuldigt, heet **reden**, bij verkorting r. Ook hier hebben we weer twee formules nl. voor l en voor s.

Als de eerste term a is, is de tweede ar, de derde ar^2 enz., zoodat

$$\boldsymbol{l = t_n = a \cdot r^{n-1}}.$$

De som van een aantal termen b.v.

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \quad . \ . \ . \ . \quad . \ . \ . \ . \quad + ar^{n-1}$$

is $a\{1 + r + r^2 + \quad . \ . \ . \ . \ . \quad + r^{n-1}\} = a \cdot \dfrac{r^n - 1}{r - 1}$ (M. Q. 1).

Het bewijs kan men ook als volgt geven:

$$\begin{aligned} r \times S &= \phantom{a +{}} ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ + ar^n. \\ S &= a + ar + ar^2 + ar^3 + \ . \ . \ . \ + ar^{n-1}. \end{aligned}$$

af ———————————————————————————

$$(r - 1)S = - a + ar^n = a(r^n - 1)$$

dus is $$\boldsymbol{S_n = a \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}}.$$

OPGAVEN.

Zoek l en s bij de volgende reeksen:

1. $4, 8, 16,$. tot 7 termen; $8, 4, 2$ . . . . tot 10 termen.
2. $2, -2^2,$. tot 11 „ ; $\frac{2}{5}, \frac{1}{2}$ . . . . tot 5 „ .
3. $\frac{2}{5}, -5,$. tot 10 „ ; $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}$ . . . . tot 7 „ .
4. $x, 1$ . . . . tot 30 „ ; $1, 4, 16$ . . . . tot q „ .
5. x, x^3 . . . tot t „ ; a, ax^2 . . . . tot n „ .
6. $\frac{a}{x}, \frac{a^2}{x^{7/6}}$ . . tot 20 „ ; $a(1+p)^{-5}, a^2(1+p)^{-4}$ tot n „ .
7. $\sqrt{2}, \sqrt{3}$. tot 10 „ ; $\sqrt{5}, 2$ . . . . tot 12 „ .
8. $\sqrt{a}, \sqrt[3]{a}$. tot 5 „ ; $a^{2/3}, a^{4/9}$ . . . . tot 8 „ .

§ **54.** Wanneer de reeks afdaalt, wordt elke term kleiner dan de voorgaande; zet men de reeks vrij ver voort, dan worden de laatste termen zoo klein, dat men allicht geneigd zou zijn te zeggen: verder zal ik ze maar laten rusten, zie b.v. hiernaast.

10
2
0,4
0,08
0,016

0,003.2
0,000.64
0,000.128
0,000.025.6
0,000.005.12

0,000.001.024
0,000.000.204.8
0,000.000.040.96
0,000.000.008.192
0,000.000.001.638.4

0,000,000,000.327.68
0,000.000.000.065.536

enz.

Hier hebben we 17 termen; de termen, die nog volgen, worden steeds $\frac{1}{5}$ van de vorige, zoodat ze heel spoedig bijzonder klein worden; de n^e term wordt $t_n = 10 \cdot (\frac{1}{5})^{n-1}$ en de som van n termen wordt $s_n = 10 \cdot \frac{(\frac{1}{5})^n - 1}{\frac{1}{5} - 1}$ of $10 \cdot \frac{1 - (\frac{1}{5})^n}{1 - \frac{1}{5}}$ of $10 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} - 10 \cdot \frac{(\frac{1}{5})^n}{1 - \frac{1}{5}} = 12\frac{1}{2} - 12\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{5})^n$ en dus:

$s_{10} = 12{,}5 - 0{,}000.001.28 = 12{,}499.998.72.$

$s_{20} = 12{,}5 - 0{,}000.000.000.000.131.1 = 12{,}499.999.999.999.868.9$

$s_{30} = 12{,}5 - 0{,}000.000.000.000.000.000.013.42 =$
$= 12{,}499.999.999.999.999.999.986.58.$

$s_{1000} = 12{,}4999$ . . . . . . 9999867 met bijna 700 negens!

Al is dit getal nu niet precies 12,5, zoo zien we toch wel, dat het verschil met 12,5 zoo klein gemaakt kan worden, als men verkiest; daar de som s_n zelfs bij nog veel grooter aantal termen nooit 12,5 wordt, maar er willekeurig weinig van verschilt, zegt men, dat **s_n 12,5 tot grens of limiet heeft;** het aantal termen noemt men dan gewoonlijk oneindig groot, hetgeen beteekent, dat er geen grens voor dat aantal bestaat; we hebben dus

$$\lim_{n=\infty} s_n = 12\tfrac{1}{2}.$$

We hebben gezien, dat in de formule $a\frac{1-r^n}{1-r} = \frac{a}{1-r} - a\frac{r^n}{1-r}$ de aftrekker zeer klein wordt om per slot zoo goed als niets te zijn; het aftrektal blijft dus over en we leeren:

van een oneindig afdalende meetkundige reeks is

$$\lim_{n=\infty} \mathbf{S}_n = \frac{a}{1-r}\cdot$$

OPGAVEN.

§ 55. Bepaal de limiet van de som van n termen van de volgende reeksen:

1. $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$; $\quad 10 - 9 + 8{,}1 - 7{,}29 + \ldots$
2. $5\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \ldots$; $\quad 0{,}9 + 0{,}03 + 0{,}001 + \ldots$
3. $0{,}77777\ldots$; $\quad 0{,}121212\ldots$; $\quad 0{,}544444\ldots$; $\quad 0{,}721414\ldots$.
4. $1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \ldots$; $\quad 2x^2 - 0{,}25x + \ldots$
5. $p + q + \frac{q^2}{p} + \ldots$; $\quad 1 + \frac{n-1}{n} + \frac{(n-1)^2}{n^2} + \frac{(n-1)^3}{n^3} + \ldots$
6. $\sqrt{0{,}2} + \frac{1}{25}\sqrt{5} + \ldots$; $\quad \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{2}-2} + \frac{1}{2} + \ldots$
7. In een vierkant zet men een nieuw vierkant, waarvan de hoekpunten de middens der zijden zijn; in dit weer een, enz. Bepaal de som der omtrekken van die vierkanten.
8. Door verbinding van de middens der zijden van een regelmatigen zeshoek ontstaat een nieuwe regelmatige zeshoek; als men met deze hetzelfde doet enz., hoeveel bedraagt dan de som der omtrekken van alle zeshoeken?

9. Beschrijf in een gelijkzijdigen driehoek een rechthoek, waarvan de basis 4 × de hoogte is; in den driehoek, die er daardoor boven overblijft, weer een, enz.; bepaal de totale oppervlakte van al die rechthoeken.

10. In een cirkel met straal r beschrijft men drie even groote cirkels, die elkaar en den grooten cirkel aanraken; in elk van de drie kleinere beschrijft men er weer drie enz. Bepaal de som van de oppervlakken van al deze cirkels.

§ 56. Daar in elk der formules $l = a \cdot r^{n-1}$ en $s = a\dfrac{r^n - 1}{r - 1}$ vier van de vijf grootheden voorkomen, zal men telkens bij het geven van drie der vijf de 5e en 4e kunnen uitrekenen door de drie gegevene in deze formules te substitueeren; tevens blijkt, dat men 10 vraagstukken kan maken; men kan nl. vragen naar a & r, a & n, a & l en a & s; naar r & n, r & l en r & s; naar n & l en n & s en nog naar l & s.

OPGAVEN.

Vul de open plaatsen in:

	a	r	n	l	s
1.	. . . .	2	. . .	192	360
	. . . .	$\sqrt{3}$	. . .	$243\sqrt{3}$	$364(\sqrt{3}+1)$
2.	. . . .	-3	7	. . . .	2,9173
	. . . .	$\frac{1}{3}$	8	. . . .	$\frac{6560}{6561}$
3.	. . . .	-2	10	-256	. . . . . .
	. . . .	$\frac{1}{3}$	5	$\frac{2}{27}$	. . . . . .
4.	2	. . . .	. . .	$10\frac{1}{8}$	$\frac{211}{8}$
	3	. . . .	. . .	$\frac{1}{243}$	$\frac{547}{243}$
5.	$74\frac{2}{3}$	. . . .	6	$2\frac{1}{3}$	. . . . . .
	3	. . . .	6	$-\frac{1}{1024}$	. . . . . .
6.	$\frac{1}{64}$	4	. . .	. . . .	$21\frac{21}{64}$
	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{3}$	. . .	. . .	$\frac{91}{162}$
7.	2	$-\frac{1}{2}$	. . .	$-\frac{1}{256}$	. . . . . .
	3	$\sqrt{2}$	. . .	$192\sqrt{2}$	. . . . . .
8.	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	12	. . . .	. . . . . .
	$(\sqrt{2}+1)^{-1}$	$2+\sqrt{2}$	7	. . . .	. . . . . .

§ 57. Had men in bovenstaande vraagstukken de gegevens door letters voorgesteld b.v. a', l' en s', dan was van de meeste de oplossing heel wat lastiger geworden; we geven hier een paar voorbeelden:

1. Bepaal r en n uit a, l en s.

In de vergelijkingen $l' = a' \,.\, r^{n-1}$ . . . . (I)

$$\text{en } s' = a' \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad \text{. . . . . (II)}$$

zijn de letters met accenten gegeven; vermenigvuldig beide leden van (I) met r, dan wordt het $l'r = a'r^n$, waaruit $r^n = \frac{l'r}{a'}$; deze waarde in (II) geeft $s' = \frac{l'r - a'}{r - 1}$, waaruit men vindt $r = \frac{s' - a'}{s' - l'}$; uit (I) volgt nog $(n - 1) \log r = \log l' - \log a'$, zoodat $n = \frac{\log l' - \log a'}{\log r} + 1$; zet men voor r de gevonden waarde dan komt er

$$n = \frac{\log l' - \log a' + \log (s' - a') - \log (s' - l')}{\log (s' - a') - \log (s' - l')}.$$

2. Bepaal a en n uit r, l en s.

In de vergelijkingen $l' = a \,.\, r'^{n-1}$ . . . . (I)

$$\text{en } s' = a \frac{r'^n - 1}{r' - 1} \quad \text{. . . . . (II)}$$

zijn de letters met accenten gegeven.

Door deeling van (II) op (I) heeft men $\frac{l'}{s'} = \frac{r'^{n-1} (r' - 1)}{r'^n - 1}$ of $\frac{l'r'}{s'} = \frac{r'^n (r' - 1)}{r'^n - 1}$, of $(r'^n - 1)\, l'r' = s'r'^n (r' - 1)$, waaruit

$$r'^n = \frac{l'r'}{l'r' - s'(r' - 1)}$$

$$\text{en } n \log r' = \log l'r' - \log \{l'r' - s'(r' - 1)\}$$

$$n = \frac{\log l'r' - \log \{l'r' - s'(r' - 1)\}}{\log r'}$$

Vermenigvuldig beide leden van (I) met r', dan wordt $r'^n = \frac{lr'}{a}$; dit gesubstitueerd in (II) geeft: $s' = \frac{l'r' - a}{r' - 1}$, waaruit $a = l'r' - s'(r' - 1)$.

OPGAVEN.

1. Bepaal a uit l, r en n; r uit a, l en n; n uit l, a en r.
2. Bepaal a uit r, n en s; n uit a, r en s; waarom kan men r niet oplossen uit a, s en n?
3. Bepaal l uit r, n en s; ook uit a, r en s.
4. Bepaal s uit r, l en n; ook uit a, l en n; nog uit a, r en l.
5. Welke vergelijking zou men moeten oplossen, om a te bepalen uit l, n en s; welke ter bepaling van r uit l, n en s en welke om l uit te drukken in a, n en s?

§ 58. Wenscht men tusschen twee termen ar^m en ar^{m+1} k termen in te lasschen, dan heeft men ter bepaling van de nieuwe reden x slechts een eenvoudige vergelijking op te lossen, zooals blijkt uit het volgende:

ar^m . . . . ar^{m+1}

ar^m, $ar^m x$, $ar^m x^2$, ... , $ar^m x^k$, $ar^m x^{k+1}$.

Hier is dus $ar^{m+1} = ar^m x^{k+1}$, waaruit $r = x^{k+1}$; de **nieuwe reden** wordt dus $\sqrt[k+1]{r}$; het aantal termen wordt $(n-1)k+n$; de eerste en de laatste blijven onveranderd.

Opmerking. Het getal 6, dat geïnterpoleerd tusschen 3 en 12 met deze de meetkundige reeks 3, 6, 12 vormt, heet de **meetkundig middelevenredige** tusschen 3 en 12, ook wel kortweg de middelevenredige: tusschen a en b wordt het blijkbaar $\sqrt{ab}$. De drie getallen 3, 6 en 12 heeten **gedurig evenredig**; elk drietal op elkaar volgende termen van een meetkundige reeks is gedurig evenredig. Geeft men twee termen en vraagt men de derde, die met de beide vorige een meetkundige reeks vormen, dan heet deze de **3e evenredige** tot de beide gegevene.

OPGAVEN.

1. Lasch	3 termen in tusschen	31	. .	en	. .	496.
„	4 „ „ „	1	. .	„	. .	0,01024.
„	3 „ „ „	$-\frac{2}{5}$	. .	„	. .	$-\frac{8}{125}$.
„	7 „ „ „	$\frac{1}{9}$	. .	„	. .	9.

2. Lasch 3 termen in tusschen a en b.
„ 4 „ „ „ $\frac{2,278125a^3}{3x^2}$ „ $\frac{16x^3}{5a^2}$.
„ 1 term „ „ $\sqrt{5}-1$ „ $8\sqrt{5}-16$.
„ 4 termen „ „ a^3b^{-6} „ $a^{-2}b^4$.

3. Lasch m termen in tusschen $\frac{b}{a}$ en $\frac{a}{b}$ en bewijs, dat het gedurig product van alle termen gelijk is aan 1.

4. Bepaal de middelevenredige tusschen $\frac{c}{a}$ en $\frac{a}{c}$; tusschen 12 en 108; tusschen a^{-1} en $a^{1/2}$; tusschen $p\sqrt{q}$ en $q\sqrt{p}$.

5. Eveneens tusschen $9+4\sqrt{5}$ en $9-4\sqrt{5}$; tusschen $x^2+2xy+y^2$ en $x^2-2xy+y^2$; tusschen $9a^2+12a+4$ en $4a^2-12a+9$.

6. Bepaal de 3e evenredige tot a^3 en a^{-1}; tot $(x+y)^2$ en $\frac{1}{x+y}$; tot $a^{-2/3}$ en $a^{-3/2}$.

7. Als $x-y$ de middelevenredige is tusschen $y+z-2x$ en y, dan is x middelevenredig tusschen y en z. Bewijs.

8. Van een meetkundige reeks is de $(p+q)^e$ term k en de $(p-q)^e$ term is l; wat is de p^e term? Wat is de reden? Wat is de q^e term?

9. Bepaal de middelevenredige tusschen $\frac{x+y}{x-y}$ en $(x^2-y^2)(xy)^{-2}$; en bepaald de 3e evenredige tot $x^2-\frac{1}{y^{-2}}$ en $\frac{1}{x^{-1}}-y$.

10. Hoeveel bedraagt de middelevenredige tusschen de wortels der vierkantsvergelijking $3x^2+7x\sqrt{2}+6=0$ meer dan het gemiddelde dier wortels?

11. Als y middelevenredig is tusschen x en z, dan is $x^2y^2z^2(x^{-3}+y^{-3}+z^{-3})=x^3+y^3+z^3$. Bewijs.

GEMENGDE OPGAVEN.

§ 59. 1. Bepaal de limiet van de som van n termen der reeks $\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}+\ldots.$

2. Bepaal de eerste term van een meetkundige reeks, waarvan de 4e 0,016 en de 8e 0,0000256 is. Bepaal de som van 100 termen.

3. Het gemiddelde van twee getallen is $1 + x^2$ en de middelevenredige is $1 - x^2$; bepaal door middel van een vierkantsvergelijking beide getallen.

4. De som van 4 termen van een meetkundige reeks is gelijk aan de reden vermeerderd met 1; de eerste term is $\frac{1}{10}$. Welke zijn de vier termen?

5. Van vier getallen vormen de eerste drie een rekenkundige, de laatste drie een meetkundige reeks. De som van het 1e en 3e is 2, van het 2e en 4e is 37. Welke getallen zijn dat?

6. Bewijs: *a.* de omgekeerden van de termen van een meetkundige reeks vormen weer een M. R.

b. De reeks ontstaande uit de producten van 1e en 2e, 2e en 3e, 3e en 4e term van een M. R. is een M. R.

c. De reeks ontstaande uit de sommen (verschillen) van 1e en 2,e 2e en 3e, 3e en 4e term enz. van een M. R. is een M. R.

7. Als a, b en c gedurig meetkundig, a, b' en c gedurig rekenkundig evenredig zijn, dan is $\frac{b'}{b} = \frac{a + c}{2\sqrt{ac}}$. Bewijs.

8. Bewijs, dat in het vorige vraagstuk $b' > b$ is.

9. Als a, b, c en x allen reëele getallen zijn en

$$(a^2 + b^2)x^2 - 2b(a + c)x + b^2 + c^2 = 0,$$

dan is b middelevenredig tusschen a en b. Bewijs.

10. Als P het gedurig product is van n termen van een meetkundige reeks, waarvan de eerste a is en de laatste l, bewijs dan, dat $P^2 = (al)^n$ is.

11. Als

$$S_1 = a + ar + ar^2 + ar^3 + \; . \; . \; . \; . \; + ar^{2n}.$$
$$S_2 = a - ar + ar^2 - ar^3 + \; . \; . \; . \; . \; + ar^{2n}.$$

dan is $S_1S_2 = a^2 + a^2r^2 + a^2r^4 + a^2r^6 + \; . \; . \; . \; + a^2r^{4n}$.
Bewijs.

12. Indien P het gedurig product is van n termen eener meetkundige reeks, S de som dier termen, S_1 de som der omgekeerde termen, bewijs dan: $P^2 = \left(\frac{S}{S_1}\right)^n$.

13. Bepaal de som van n termen der reeks

$a,\ (a+v)r,\ (a+2v)r^2,\ (a+3v)r^3,\ (a+4v)r^4,\ \ldots\ldots$

Noem de som S; bepaal rS en trek af.

Behandel op dezelfde wijze:

$a,\ \frac{a+v}{r},\ \frac{a+2v}{r^2},\ \frac{a+3v}{r^3},\ \ldots\ldots$ tot n termen.

14. Bepaal de som van 100 termen der reeks:

$1,\ 3\times 2,\ 5\times 2^2,\ 7\times 2^3,\ 9\times 2^4,\ \ldots\ldots$

$1,\ \frac{5}{3},\ \frac{9}{3^2},\ \frac{13}{3^3},\ \frac{18}{3^4},\ \ldots\ldots$

15. Van een meetkundige reeks is het product der termen 248832; de middelste term is 12 en de som van den eersten en laatsten 51. Bereken a, r en n.

16. Van een meetkundige reeks is de 12[e] term $2^{-1/5}\,a^3\,b^{-2/3}$ en de 11[e] $a^{2\,1/2}\,b^{-2}$. Wat is de eerste? Bepaal ook het gedurig product van de eerste 12 termen.

17. Op het been BA van hoek ABC (groot 60°) neemt men een stuk BD $= p$ en projecteert dit op BC; deze projectie projecteert men weer op BA enz. Bepaal de gezamenlijke lengte der projecties en ook der projecteerende lijnen, als men dit tot in het oneindige voortzet.

18. De som van vijf getallen, die een meetkundige reeks vormen, is 121 en de som hunner vierkanten 7381. Welke zijn die getallen?

19. In een gelijkzijdigen driehoek wordt een cirkel beschreven; in elk van de drie ruimten, die er overblijven, construeert men een cirkel, die den eersten en twee zijden raakt; zoo gaat men verder. Men vraagt de limiet van de som van al die cirkels den eersten inbegrepen.

20. Los x op uit $4 = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \frac{4}{x^4} + \ldots$ enz.

HARMONISCHE REEKSEN.

§ **60.** Een reeks heet een harmonische reeks, wanneer het verschil tusschen de eerste en de tweede van een drietal op elkaar volgende termen staat tot het verschil van de tweede en de derde als de eerste tot de derde; b.v.: 720, 360, 240, 180, 144, 120, $102\frac{6}{7}$, 90, 80, 72, $65\frac{5}{11}$, 60, $55\frac{5}{13}$, $51\frac{3}{7}$, 48.

$$(720 - 360) : (360 - 240) = 720 : 240;$$

$$(72 - 65\tfrac{5}{11}) : (65\tfrac{5}{11} - 60) = 72 : 60.$$

Als de reeks is a, b, c, d, e, f, enz. heeft men dus steeds $(a - b) : (b - c) = a : c$, waaruit volgt $ac - bc = ab - ac$, waaruit na deeling door abc volgt $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b}$, welke vergelijking aanwijst, dat $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ en $\frac{1}{c}$ termen zijn van een rekenkundige reeks; daar men hetzelfde kan doen met elk drietal termen, volgt de eigenschap: **De omgekeerden van de termen eener harmonische reeks zijn de termen van een rekenkundige reeks.** Deze eigenschap geeft ons een eenvoudig middel aan de hand om een harmonische reeks op te schrijven: neemt men toch een rekenkundige reeks a, $a + v$, $a + 2v$, $a + 3v$ enz. en keert men alle termen om, aldus: $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a+v}$, $\frac{1}{a+2v}$, $\frac{1}{a+3v}$ enz., dan vormen deze een harmonische reeks; we hebben inderdaad:

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+v}\right) : \left(\frac{1}{a+v} - \frac{1}{a+2v}\right) = \frac{a+v-a}{a(a+v)} : \frac{a+2v-a-v}{(a+v)(a+2v)} =$$

$$= \frac{v}{a} : \frac{v}{a+2v} = \frac{1}{a} : \frac{1}{a+2v},$$

dus als 1[e] tot 3[e].

Op deze wijze is de gegeven reeks ook gevormd nl.: de getallen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 enz., die een rekenkundige reeks vormen, zijn omgekeerd tot 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, enz. en toen met 720 vermenigvuldigd.

Bijna alle vraagstukken over harmonische reeksen worden dan

ook omgezet in die over rekenkundige reeksen b.v.: **Lasch *n* termen in** tusschen elk paar termen der harmonische reeks a, b, c, d enz. De rekenkundige reeks wordt $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$, waarbij dus $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{d} - \frac{1}{c} = v$ is. Het nieuwe verschil wordt dus $\frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{n+1} = \frac{a-b}{ab(n+1)}$ en de nieuwe rekenkundige reeks wordt

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{a} + \frac{\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)}{n+1}, \frac{1}{a} + \frac{2\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)}{n+1}, \ldots\ldots, \frac{1}{b} \text{ of}$$

$$\frac{1}{a}, \frac{nb+a}{(n+1)ab}, \frac{(n-1)b+2a}{(n+1)ab}, \ldots\ldots, \frac{1}{b},$$

zoodat men voor de gevraagde harmonische reeks krijgt:

$$a, \frac{ab(n+1)}{a+nb}, \frac{ab(n+1)}{2a+(n-1)b}, \ldots\ldots, b.$$

We merken nog op, dat op deze manier echter geen formule gegeven kan worden voor de som van n termen eener harmonische reeks.

Men spreekt van de harmonisch **middelevenredige** x tusschen a en b, als $(a-x):(x-b) = a:b$ is, waaruit men vindt $x = \frac{2ab}{a+b}$, eveneens van een harmonisch **derde evenredige** tot a en b, als $(a-b):(b-y) = a:y$ is, waaruit men vindt $y = \frac{ab}{2a-b}$.

We geven nog een paar vraagstukken als *voorbeelden:*

1. *De tweede term van een harmonische reeks is 2, de zesde is 6. Bepaal den 10^{den}.*

De reeks der omgekeerden heeft voor 2^{den} term $\frac{1}{2}$, voor 6^{den} term $\frac{1}{6}$; het verschil is $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$; de rekenkundige reeks heeft dus tot verschil $\frac{1}{12}$, zoodat de reeks is:

$$\tfrac{7}{12}, \tfrac{6}{12}, \tfrac{5}{12}, \tfrac{4}{12}, \tfrac{3}{12}, \tfrac{2}{12} \text{ enz.}$$

De 10^{e} term is alzoo:

$$\tfrac{7}{12} - 9 \cdot \tfrac{1}{12} = -\tfrac{1}{6}.$$

De 10^{e} term van de harmonische reeks is dus -6.

2. *Als* $a + b$, $2b$ *en* $b + c$ *harmonisch evenredig zijn, zijn* a, b *en* c *meetkundig evenredig. Bewijs.*

Uit het gegeven volgt, dat $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{2b}$ en $\frac{1}{b+c}$ een rekenkundige reeks vormen, zoodat $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = 2 . \frac{1}{2b}$ of na vermenigvuldiging met het product der noemers:

$b(b + c) + b(a + b) = (a + b)(b + c)$, waaruit volgt $b^2 = ac$ of $a : b = b : c$.

OPGAVEN.

§ **61**. In de volgende vraagstukken beteekent R.R. rekenkundige, M.R. meetkundige en H.R. harmonische reeks; eveneens R.M. rekenkundig, M.M. meetkundig en H.M. harmonisch middelevenredig.

1. Lasch 5 termen in tusschen 1 en 7, die met 1 en 7 een H.R. vormen; eveneens tusschen $\frac{2}{3}$ en $\frac{3}{2}$.

2. Bewijs dat R.M. > M.M. > H.M.; ook dat R.M. × H.M = $(\text{M.M.})^2$.

3. Als de R.M. van twee grootheden 1 is, bewijs dan, dat de H.M. het vierkant is van de M.M.

4. Als x, y en z een H.R. vormen, dan vormen $(y + z - x)^2$, $(z + x - y)^2$ en $(x + y - z)^2$ een R.R.

5. Bepaal 10 termen der H.R. 16, 12, enz. Ook van 12, 16 enz.

6. Als x, y en z een H.R. vormen, dan zullen $\frac{x}{y+z}$, $\frac{y}{z+x}$ en $\frac{z}{x+y}$ ook een H.R. vormen.

7. De som van drie termen van een H.R. is $1\frac{1}{12}$; als de 1e term $\frac{1}{2}$ is, bepaal dan die reeks.

8. De R.M. van twee getallen is 13 meer dan de M.M. en deze is weer 12 meer dan de H.M. Bepaal die getallen.

9. Als a_1, a_2, a_3 en a_4 een H.R. vormen, dan is:

$$a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 = 3a_1a_4.$$

10. Als a, b en c een H.R. vormen, dan is:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) = \frac{4}{ac} - \frac{3}{b^2}.$$

SAMENGESTELDE INTEREST.*)

§ 62. Wanneer een kapitaal tegen een zeker percent uitstaat en na verloop van elk jaar (half jaar, kwartaal) de verschenen rente niet in ontvangst wordt genomen, maar bij het kapitaal gevoegd wordt en dus gedurende den volgenden termijn ook rente gaat opbrengen, dan zegt men dat het kapitaal op **samengestelden interest** is uitgezet.

Het voornaamste vraagstuk, dat zich daarbij voordoet, en dat tevens de grondslag vormt voor het volgende en de omkeeringen is:

I. *Hoe groot wordt een kapitaal k, dat gedurende n jaren (n termijnen) tegen p %₀ op samengestelden interest uitstaat?*

Oplossing.

f 100 brengt in 1 jaar p gld. rente op.

f 1 „ „ 1 jaar $\frac{p}{100}$ „ „ „

f 1 groeit dus in 1 jaar aan tot $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ gulden.

Het kapitaal k wordt dus na 1 jaar $k\left(1+\frac{p}{100}\right)$ gulden.

Deze som staat gedurende het 2e jaar uit tegen hetzelfde percent. Het groeit dus in 2 jaar aan tot $k\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$ en in n jaar tot $k\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$; hierin is n een geheel getal. Men noemt $1+\frac{p}{100}$ den rentefactor.

---

*) De meeste vraagstukken over Sam. Interest lost men zeer gemakkelijk op met de **Rentetafels D van P. Wijdenes.**

Uitgave Noordhoff, Groningen; prijs f 0.50.

Een duidelijk beeld van den aanwas ziet men in fig. 1.

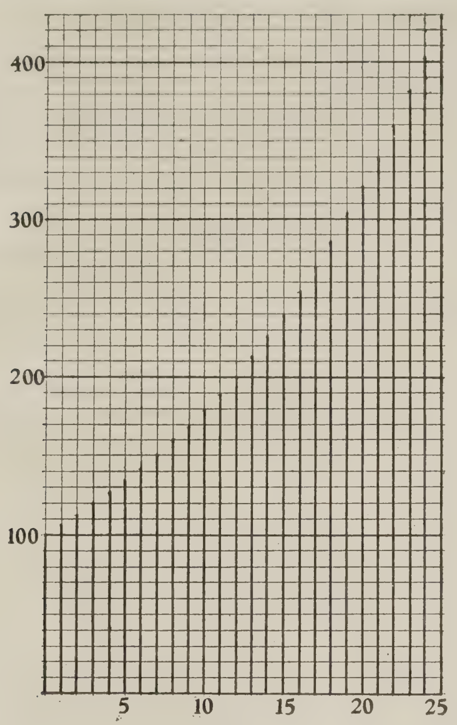


Fig. 1.

Op deze figuur ziet men de aangroeiing van 100 gulden à 6%:

1	106,—	7	150,36	13	213,29	19	302,56
2	112,36	8	159,38	14	226,09	20	320,71
3	119,10	9	168,95	15	239,66	21	339,96
4	126,25	10	179,08	16	254,04	22	360,35
5	133,82	11	189,83	17	269,28	23	381,97
6	141,85	12	201,22	18	285,43	24	404,89

na 25 jaar is de grootte van het kapitaal *f* 429,19. Men lette op, dat er op de figuur geen kromme lijn over de uiteinden der loodlijnen loopt.

§ 63. Hiermede hebben we geleerd de grootte te bepalen na elk vol jaar (of na elken geheelen termijn); als van zelf rijst nu

de vraag, hoe men dan het eindkapitaal berekent voor een gebroken aantal jaren; daarbij zal men zich moeten houden aan hetgeen usance is en deze zegt: als er 4 $^0/_0$ per jaar bedongen is, dan is de rentevergoeding voor een half jaar 2 $^0/_0$, voor een kwartaal 1 $^0/_0$, voor een maand $\frac{1}{3}$ $^0/_0$, voor t dagen $\frac{t}{360} \times 4\,^0/_0$, d.w.z. het kapitaal k klimt (bij 4 $^0/_0$) elken dag op met $\frac{1}{360} \times 4\,^0/_0 = \frac{1}{9000}$ van de waarde, die het heeft aan het begin van het jaar, zoodat er een gestadige aangroeiing is (op de figuur volgens een rechte lijn) gedurende elken termijn (zie fig. 2).

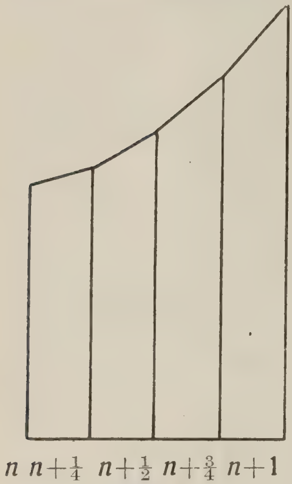


Fig. 2.

Daarmee is natuurlijk volstrekt niet gezegd, dat 1 $^0/_0$ per kwartaal, 2 $^0/_0$ per half jaar of 4 $^0/_0$ per jaar hetzelfde resultaat geven. Voegt A elk kwartaal 1 $^0/_0$ bij zijn kapitaal, B elk half jaar 2 $^0/_0$ en C elk jaar 4 $^0/_0$, dan heeft de eerste aan het eind van het jaar $1{,}01^4 \times k$, de tweede $1{,}02^2 \times k$ en de derde $1{,}04 \times k$; nu is $1{,}01^4 = 1{,}04060401$ en $1{,}02^2 = 1{,}0404$, zoodat de kleinste termijnen bij samengestelden intrest het grootste kapitaal geven. Bij alle vraagstukken, die geheelen en deelen van jaren bevatten, b.v. n jaar en $\frac{a}{b}$ van een jaar, heeft men:

$$\textbf{Eindkapitaal} = K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \left(1 + \frac{a}{b} \cdot \frac{p}{100}\right).$$

Opmerking. Daar 2 $^0/_0$ per half jaar meer is dan 4 $^0/_0$ per jaar, kan zich de vraag voordoen, hoe groot het percent x dan moet zijn, opdat x $^0/_0$ per half jaar overeenkomt met p $^0/_0$ per jaar; men heeft dan blijkbaar de vergelijking:

$$k\left(1 + \frac{x}{100}\right)^2 = k\left(1 + \frac{p}{100}\right),$$

dus

$$1 + \frac{x}{100} = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{1/2},$$

waaruit het percent onmiddellijk kan worden gevonden; daar het kapitaal na elk half jaar met $1+\frac{x}{100}$ wordt vermenigvuldigd, zal, als men eischt, dat voor een deel van een jaar een rente wordt vergoed, die neerkomt op p % per jaar de factor voor ½ jaar zijn $\left(1+\frac{p}{100}\right)^{1/2}$; op volmaakt dezelfde wijze vindt men voor een maand $\left(1+\frac{p}{100}\right)^{1/12}$ en in 't algemeen voor 't $\frac{a}{b}$ van een jaar $\left(1+\frac{p}{100}\right)^{\frac{a}{b}}$; in het algemeen kan men dan zeggen:

$$\text{Eindkapitaal} = k \times \left(1+\frac{p}{100}\right)^{n+\frac{a}{b}}.$$

In de vraagstukken zullen we zoo mogelijk beide oplossingen geven.

§ **64.** In de vorige formule $k_n = k\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ komen 4 grootheden voor nl. k (aanvangskapitaal), k_n (eindkapitaal na n jaar), p (percent) en n, het aantal jaren, dat nu ook gebroken kan zijn. Elk van deze grootheden kan uit de andere drie berekend worden; dit gebeurt het gemakkelijkst met logarithmen; men heeft nl. $\log k_n = \log k + n \log\left(1+\frac{p}{100}\right)$. Wanneer echter $\log\left(1+\frac{p}{100}\right)$ met n vermenigvuldigd wordt, dan maakt men een fout, als die logarithme slechts tot in 5 decimalen gegeven is. We hebben nl. gezien, dat de logarithmen onmeetbare getallen zijn, die in de logarithmentafel opgegeven worden nauwkeurig tot op ½ eenheid van de 5[de] decimaal. Wanneer men nu dit onnauwkeurige getal met n vermenigvuldigt, dan is dit product nauwkeurig tot op $\frac{1}{2}n$ eenheden der 5[de] decimaal. Deze fout kan dus vrij groot worden, als n een groot getal is. Men voorkomt dit door de logarithmen van de meest voorkomende rentefactoren tot in 7 decimalen nauwkeurig op te geven, en dan na de vermenigvuldiging het getal $n \times \log\left(1+\frac{p}{100}\right)$ weer tot

op 5 decimalen af te ronden. Hieronder volgen de meest voorkomende waarden van $\log\left(1+\frac{p}{100}\right)$:

log 1,01 = 0,0043214	log 1,045 = 0,0191163
log 1,015 = 0,0064660	log 1,0475 = 0,0201540
log 1,02 = 0,0086002	log 1,05 = 0,0211893
log 1,025 = 0,0107239	log 1,0525 = 0,0222221
log 1,03 = 0,0128372	log 1,055 = 0,0232525
log 1,0325 = 0,0138901	log 1,0575 = 0,0242804
log 1,035 = 0,0149403	log 1,06 = 0,0253059
log 1,0375 = 0,0159881	log 1,065 = 0,0273496
log 1,04 = 0,0170333	log 1,07 = 0,0293838
log 1,0425 = 0,0180761	log 1,075 = 0,0314085

§ 65. *Voorbeelden:*

1. *Hoe groot wordt een kapitaal van f 5000, dat 7 jaar en 3 maanden op samengestelden intrest uitstaat à 4 %?*

Oplossing.

A. Het kapitaal wordt na 7 jaar $1{,}04^7 \times f\,5000$; dit geeft in een kwartaal nog 1 % rente, zoodat men heeft:

$$k_n = 1{,}01 \times 1{,}04^7 \times f\,5000.$$

$$\begin{aligned} \log 1{,}01 &= 0{,}00432 \\ 7\log 1{,}04 &= 0{,}11923 \\ \log 5000 &= 3{,}69897 \\ &+ \overline{} \\ \log k_n &= 3{,}82252, \text{ waaruit } k_n = f\,6645{,}43. \end{aligned}$$

B. Het kapitaal wordt na $7\frac{1}{4}$ jaar $1{,}07^{7^1/_4} \times f\,5000$.

$$\begin{aligned} 7\tfrac{1}{4}\log 1{,}04 &= 0{,}12349 \\ \log 5000 &= 3{,}69897 \\ &+ \overline{} \\ \log k_n &= 3{,}82246, \text{ waaruit } k_n = f\,6644{,}43. \end{aligned}$$

2. *Bereken de jaarlijksche toename in honderdsten van percenten nauwkeurig, als men weet, dat een stad, die op 1 Januari 1906 50000 inwoners telde, op 1 Januari 1925 85000 inwoners had.*

Oplossing.

Men heeft de vergelijking:

$$50000 \times \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{19} = 85000,$$

waaruit

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{19} = 1,7$$

$$19 \log \left(1 + \frac{p}{100}\right) = \log 1,7$$

$$\log 1,7 = 0,23045$$

$$19 \overline{\qquad\qquad}$$

$$\log \left(1 + \frac{p}{100}\right) = 0,01213, \text{ waaruit } 1 + \frac{p}{100} = 1,0283,$$

zoodat men vindt 2,83 %.

3. *Iemand zet op 1 Januari 1925 een kapitaal van f 10000 op samengestelden intrest uit tegen 5 % 's jaars.*

Na hoeveel tijd is dat kapitaal verdubbeld?

Oplossing.

A. Stel, dat het kapitaal in x jaar verdubbeld is; dan is

$$20000 = 10000 \times 1,05^x \text{ of}$$

$$2 = 1,05^x, \text{ dus } \log 2 = x \log 1,05,$$

$$\text{waaruit } x = \frac{\log 2}{\log 1,05} = \frac{0,30103}{0,02119} = 14, \ldots$$

Hieruit zien we, dat het na 14 jaar nog niet verdubbeld is; het is dan nog maar $1,05^{14} \times f\,10000 = f\,19799,32$; dit kapitaal moet dus à 5 % nog opbrengen *f* 200,68; nu is 5 % van *f* 19799,32 gelijk aan *f* 989,97, zoodat het gevraagde aantal dagen is $\frac{200,68}{989,27} \times 360$ dagen $= 73$ dagen.

B. Men vindt weer $x = \frac{0,30103}{0,02119} = 14,206.$

Nu is 0,206 jaar $= \frac{206}{1000} \times 360$ dagen $= 74$ dagen, aldus 1 dag meer.

Bij deze manier houdt men zich ook aan de usance het jaar op 360 dagen te rekenen.

4. *Iemand moet over $5\frac{1}{2}$ jaar een som van f 1000 betalen.*

Hoeveel moet hij nu bij een bank plaatsen om de verlangde som op het afgesproken tijdstip te hebben? Rente 4 %.

Oplossing.

A. Stelt men de gevraagde som $f\,x$, dan heeft men de vergelijking $1000 = x \times 1{,}04^5 \times 1{,}02$, waaruit $x = \dfrac{1000}{1{,}045^5 \times 1{,}02}$.

$$
\begin{array}{rlcrl}
5 \log 1{,}04 & = 0{,}08517 & \qquad & \log 1000 & = 3 \\
\log 1{,}02 & = 0{,}00860 & & \log \text{noemer} & = 0{,}09377 \\
+ \hline \log \text{noemer} & = 0{,}09377 & & \hline \log x & = 2{,}90623 \\
 & & & x & = f\,805{,}80.
\end{array}
$$

B. Bij de andere oplossing heeft men de vergelijking

$$1000 = x \times 1{,}04^{5^1/_2},$$

$$\text{waaruit } x = \frac{1000}{1{,}04^{5^1/_2}}.$$

$$
\begin{array}{rl}
\log 1000 & = 3 \\
5\tfrac{1}{2} \log 1{,}04 & = 0{,}09368 \\
\hline
\log x & = 2{,}90632 \qquad\qquad x = f\,805{,}97
\end{array}
$$

Een schuld van f 1000, te betalen over $5\frac{1}{2}$ jaar, kan dus nu voldaan worden met $f\,\dfrac{1000}{1{,}04^5 \times 1{,}02}$ contant. Men noemt dit laatste bedrag **de contante waarde** van f 1000 over $5\frac{1}{2}$ jaar.

OPGAVEN.

§ 66. 1. Tot welk bedrag groeit f 5000 aan à 5 % gedurende 4 jaar; $5\frac{1}{2}$ jaar; 10 jaar en 200 dagen?

2. Hoeveel verschil maakt het of men van een kapitaal, groot f 25000 jaarlijks de rente à 4 % bijvoegt, halfjaarlijks à 2 % of ieder kwartaal à 1 %? Te berekenen over 10 jaar.

3. Een kapitaal, dat 24 jaar tegen $4\frac{1}{2}$ % 's jaars uitstond, is aangegroeid tot f 10000. Hoe groot was het bij het begin en hoe groot was het na 12 jaar?

4. Tegen welk % staat een kapitaal uit, dat in 15 jaar tijd is aangegroeid van f 4000 tot f 8315,71?

5. In hoeveel tijd is een kapitaal à $4\frac{1}{2}$ % tweemaal, driemaal zoo groot geworden?

6. Iemand zet *f* 200 op een spaarbank, die elk kwartaal 1 % rente bijschrijft; hoeveel bedraagt zijn bezitting na 5 jaar en 3 maanden; hoeveel zal deze bedragen, als jaarlijks 4 % wordt bijgeschreven?

7. Iemand heeft over 2 maanden *f* 1000 te betalen; hij teekent een promesse vervallende over 2 jaar en 8 maanden. Welk bedrag moet daarop staan uitgedrukt? Rente $4\frac{3}{4}$ %.

8. De bevolking van een stad bedraagt 300 000 inwoners. Over hoeveel jaar zal de bevolking bij een regelmatige toename van 2 % de 400 000 overschreden hebben?

9. Een woekeraar leent aan iemand, die in geldverlegenheid verkeert *f* 500, terug te betalen met *f* 800 over 4 jaar; hoeveel % rekent hij?

10. Ten behoeve van een stichting wordt een som van *f* 10 000 bij een bank gedeponeerd. Deze som zal na 40 jaar met den samengestelden intrest à $3\frac{1}{2}$ % worden uitgekeerd. Hoeveel wint de bank daarop, als ze zelf het geld à $4\frac{1}{2}$ % belegt?

§ 67. II. *Als iemand k gulden tegen p % op samengestelden intrest uitzet en* **behalve de rente jaarlijks** a **gulden aan het kapitaal toevoegt (van het kapitaal afneemt),** *hoeveel heeft hij dan na n jaar?*

Oplossing.

Na 1 jaar bezit hij $k\left(1+\frac{p}{100}\right)=a.$

„ 2 „ „ „ $\left(1+\frac{p}{100}\right)\left\{k\left(1+\frac{p}{100}\right)+a\right\}+a=$

$$=k\left(1+\frac{p}{100}\right)^2+a\left(1+\frac{p}{100}\right)+a.$$

„ 3 „ „ „ $k\left(1+\frac{p}{100}\right)^3+a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2+a\left(1+\frac{p}{100}\right)+a$

en na n jaar $k\left(1+\frac{p}{100}\right)^n+a\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1}+\ldots+a\left(1+\frac{p}{100}\right)+a.$

Of **anders:** k groeit in n jaar aan tot $k\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$; de eerst gestorte a gulden groeit, onafhankelijk van hetgeen er verder bijkomt, aan tot $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1}$, de volgende tot $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-2}$ enz.; aldus verkrijgt men dezelfde reeks van n termen; neemt men a als beginterm, dan is de reden $1+\frac{p}{100}$; voor de som van deze termen vindt men $a\frac{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n-1}{\frac{p}{100}}$; men krijgt dus de volgende formule voor het bezit na n jaar ($n=$ geheel):

$$k_n=k\left(1+\frac{p}{100}\right)^n \pm a\frac{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n-1}{\frac{p}{100}},$$

waarbij het positieve teeken geldt bij vermeerdering, het negatieve bij vermindering.

In deze formule is n het aantal malen, dat a gld. bij het kapitaal gevoegd of er afgenomen is; n moet dus noodzakelijk een geheel getal zijn. Als we nu een vraagstuk hebben, waarbij k, k_n, a en p gegeven zijn en waarin n berekend moet worden, en we vinden voor n een breuk, b.v. $7\frac{1}{2}$, dan wil dit alleen zeggen, dat na 7 jaar de gegeven toestand nog niet bereikt is en na 8 jaar die toestand overschreden zal zijn. We zullen dit met een voorbeeld nader toelichten:

Voorbeeld 1. *Iemand zet f 10000 tegen 3 %₀ op samengestelden interest en voegt jaarlijks behalve de rente nog f 300 bij het kapitaal. Na hoeveel tijd is hij in het bezit van f 20000?*

Oplossing.

Stel, dat hij na x jaar *f* 20000 bezit.

Na 1 jaar heeft hij $10000 \times 1{,}03 + 300$ gld.

„ 2 „ „ „ $10000 \times 1{,}03^2 + 300 \times 1{,}03 + 300$ gld.

„ x „ „ „ $10000 \times 1{,}03^x + 300 \times 1{,}03^{x-1} +$
$+ 300 \times 1{,}03^{x-2} + \ldots\ldots + 300$ gld.

dus: $$k_n = 10000 \times 1{,}03^x + 300 \, \frac{1{,}03^x - 1}{0{,}03}$$

$$20000 = 10000 \times 1{,}03^x + 300 \times \frac{1{,}03^x - 1}{0{,}03}$$

$$20000 = 10000 \times 1{,}03^x + 10000 \times (1{,}03^x - 1)$$

$$20000 = 20000 \times 1{,}03^x - 10000$$

$$30000 = 20000 \times 1{,}03^x$$

$$3 = 2 \times 1{,}03^x; \text{ dus } 1{,}03^x = 1{,}5$$

$$x = \frac{\log 1{,}5}{\log 1{,}03} = \frac{0{,}17609}{0{,}01284} = 13, \ldots\ldots \text{ (gewone deeling).}$$

Daar bij de afleiding verondersteld is, dat x een geheel getal is en de door ons gevonden waarde tusschen 13 en 14 ligt, kunnen wij hieruit alleen besluiten, dat hij na 13 jaar nog niet in het bezit der *f* 20000 is.

Na 13 jaar is hij in het bezit van:

$$10000 \times 1{,}03^{13} + 300 \times \frac{1{,}03^{13} - 1}{0{,}03} =$$

$$= 10000 \times 1{,}03^{13} + 10000 \times (1{,}03^{13} - 1) =$$

$$= 10000 \times 1{,}03^{13} + 10000 \times 1{,}03^{13} - 10000$$

$$= 20000 \times 1{,}03^{13} - 10000.$$

Stel $20000 \times 1{,}03^{13} = y$.

$$\log y = \log 20000 + 13 \log 1{,}03$$

$$\log 20000 = 4{,}30103$$

$$13 \log 1{,}03 = 0{,}16688$$

$$\log y = 4{,}46791$$

$$y = f\,29370{,}70.$$

Dus bezat hij na 13 jaar *f* 19370,70.

Dit kapitaal moet nu nog opbrengen 3 % rente, in een jaar dus *f* 581,12; het wordt dan *f* 19951,82; op den eersten Januari zal hij er dus geen *f* 300 meer bij hebben te voegen, maar slechts *f* 48,18.

Had men gevraagd, wanneer hij *f* 19500 zou hebben, dan moest door *f* 19370,70 nog *f* 129,30 rente opgebracht worden en dat wel in $\frac{129{,}30}{581{,}12} \times 360$ dagen $= 80$ dagen. Het antwoord was dan 13 jaar en 80 dagen.

2. *Iemand heeft een schuld van f 8000. Hij wenscht deze in 10 jaar af te lossen, door op het eind van elk jaar een vaste som te betalen. Hoe groot is deze som? Rente 4 %.*

Oplossing.

Na 1 jaar is de schuld nog:

$$8000 \times 1{,}04 - x.$$

Na 2 jaar: $8000 \times 1{,}04^2 - x \times 1{,}04 - x.$

Na 3 jaar: $8000 \times 1{,}04^3 - x \times 1{,}04^2 - x \times 1{,}04 - x.$

Na 10 jaar: $8000 \times 1{,}04^{10} - x \times 1{,}04^9 - x \times 1{,}04^8 - x \times 1{,}04^7 - x \times 1{,}04^6 \;.\;.\;.\;.\; - x.$

$$k_n = 8000 \times 1{,}04^{10} - x \times \frac{1{,}04^{10} - 1}{0{,}04}, \text{ of}$$

$$0 = 8000 \times 1{,}04^{10} - 25x \times (1{,}04^{10} - 1).$$

$$x = \frac{8000 \times 1{,}04^{10}}{25(1{,}04^{10} - 1)} = \frac{320 \times 1{,}04^{10}}{1{,}04^{10} - 1}.$$

Voor $1{,}04^{10}$ vindt men 1,48024.

$$x = \frac{320 \times 1{,}48024}{0{,}48024};$$

$$\begin{aligned} \log 320 &= 2{,}50515 \\ \log 1{,}48024 &= 0{,}17033 \\ \hline & 2{,}67548 \\ \log 0{,}48024 &= 0{,}68146 - 1 \\ \hline \log x &= 2{,}99403, \end{aligned}$$

waaruit men voor x vindt f 986,32.

OPGAVEN.

§ 68. 1. Iemand zet jaarlijks op den 1sten Januari f 200 op samengestelden interest. Hoeveel bezit die man op 1 Januari 1926, wanneer hij op 1 Januari 1910 zijn eerste storting gedaan heeft en de laatste zal doen op 1 Januari 1926? Rente 4 %.

2. Een vader zet bij de geboorte van zijn zoon 200 gld. op samengestelden intrest à 3 %. Dit herhaalt hij elk jaar op diens verjaardag, ten einde een fonds te vormen, waaruit de zoon later studeeren kan. Hoeveel is er in dat fonds als de zoon 18 jaar is? (Laatste storting op den 18en verjaardag.)

3. Hoeveel moet men aan het begin van elk jaar op samengestelden interest uitzetten om op het eind van het 8e jaar 5000 gld. te bezitten? Rente 4 %.

4. Iemand bezit 3000 gld. Aan het eind van elk jaar voegt hij behalve de rente nog 150 gld. bij het kapitaal. Hoeveel bezit hij na 12 jaar? Rente $3\frac{1}{2}$ %.

5. Iemand heeft een kapitaal van 7000 gld. op samengestelden interest uitgezet tegen $4\frac{1}{2}$ %. Hoeveel moet hij aan het eind van ieder jaar bij het kapitaal voegen om na 12 jaar 15000 gld. te bezitten?

6. Iemand heeft een kapitaal tegen 4 % uitgezet. Jaarlijks voegt hij behalve de rente nog 300 gld. bij het kapitaal en is zoodoende na verloop van 15 jaar in het bezit van 20000 gld. gekomen. Hoeveel bezat hij oorspronkelijk?

7. Iemand heeft zijn vermogen van 30000 gld. tegen 4 % bij een bank gedeponeerd. Jaarlijks neemt hij voor levensonderhoud 2000 gld. van het kapitaal af aan het eind van het jaar. Na hoeveel tijd bezit hij minder dan 10000 gld.?

8. En na hoeveel tijd is zijn vermogen geheel verteerd? Hoeveel ontvangt hij het laatste jaar?

9. Iemand heeft een schuld aangegaan van 20000 gld. tegen 4 % en wenscht die in jaarlijksche termijnen van 1500 gld. af te lossen. Na hoeveel jaar is de schuld geheel afgelost? Hoeveel wordt er de laatste maal betaald?

10. Iemand heeft een schuld van *f* 10000 en betaalt na een jaar en verder ieder jaar *f* 1000. Hoeveel heeft hij aan 't einde van het 10de jaar nog te betalen, als men 4 % jaarlijksche rente rekent? En hoeveel zou hij aan 't eind van het 10de jaar nog te betalen hebben, als hij aan 't begin van ieder half jaar *f* 500 afdeed en men 2 % halfjaarlijksche rente rekent?

11. Iemand zet een kapitaal van 100000 gld. tegen 5 % uit en voegt aan het einde van elk jaar de rente, verminderd met 3000 gld, bij het kapitaal. Na hoeveel jaren zal op die wijze het kapitaal tot 150000 gld. aangegroeid zijn?

12. Een vader laat zijn zoon een vermogen na van 20000 gld., dat à 5 $^0/_0$ op samengestelde interest wordt uitgezet. Deze neemt er op het einde van elk jaar voor zijn onderhoud 1449,40 gld. af. Na hoeveel jaren zal het kapitaal met den interest verbruikt zijn?

13. Een vader belooft zijn zoon hem bij het begin van elk jaar $f\,a$ (f 100) te zullen geven zonder kapitaal of rente in te vorderen, mits de geheele schuld hem na het overlijden van den vader bij zijn erfdeel worde in rekening gebracht. Indien nu jaarlijks 4 $^0/_0$ samengestelde interest berekend wordt en de zoon bij den dood van den vader in het geheel f A (f 1100,65^5) schuldig is, vraagt men, hoeveel jaren na die overeenkomst de vader overleden is.

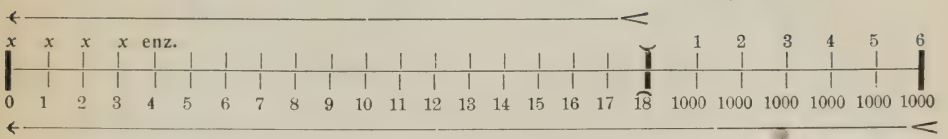
14. Een kapitaal, groot f 5000, is uitgezet tegen 5 $^0/_0$'s jaars interest van interest. Aan het einde van elk jaar wordt er nog f 200 bijgevoegd; men vraagt, wanneer het kapitaal verdubbeld zal zijn.

§ **69.** Vraagstukken over samengestelden interest, die niet tot een der beide vorige rubrieken behooren, lost men in het algemeen op door de sommen, die men ontvangt en die men betaalt te herleiden tot denzelfden datum en daarna aan elkaar gelijk te stellen. We zullen dit met een paar voorbeelden nader toelichten; daarbij dienen we de opmerking te maken, dat bij de meeste vraagstukken een kleine figuur het duidelijkst aangeeft, hoe men zich de bewerking voorstelt, terwijl ze tevens nuttig is om zich niet te vergissen in het aantal termen der meetkundige reeksen; deze fout komt nl. zeer veel voor.

Voorbeelden.

1. *Een vader wenscht van af de geboorte van zijn zoon tot en met diens 18^{den} verjaardag jaarlijks een vaste som te storten, om de 6 volgende jaren f 1000 voor diens studiën te ontvangen. Hoeveel bedraagt die som? Rente 4 $^0/_0$.*

Oplossingen. Zie de figuur:



Stel de vaste som x en herleid alle bedragen tot op den geboortedatum van den zoon (zie de pijlen); men krijgt:

$$x + \frac{x}{1{,}04} + \frac{x}{1{,}04^2} + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + \frac{x}{1{,}04^{18}} = \frac{x}{1{,}04^{18}} \times \frac{1{,}04^{19} - 1}{0{,}04}.$$

De waarde van alle ontvangsten op denzelfden datum is:

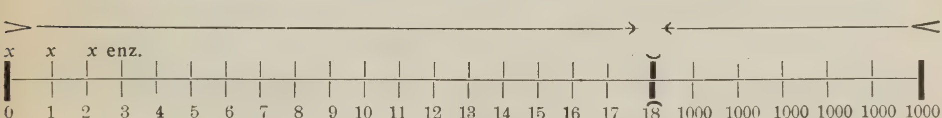
$$\frac{1000}{1{,}04^{19}} + \frac{1000}{1{,}04^{20}} + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + \frac{1000}{1{,}04^{24}} = \frac{1000}{1{,}04^{24}} \times \frac{1{,}04^6 - 1}{0{,}04}.$$

Daar de waarde van alle ontvangsten bij dergelijke vraagstukken gelijk gesteld wordt aan die van alle stortingen (in de practijk gaat dat natuurlijk heelemaal niet op!) is dus:

$$\frac{x}{1{,}04^{18}} \times \frac{1{,}04^{19} - 1}{0{,}04} = \frac{1000}{1{,}04^{24}} \times \frac{1{,}04^6 - 1}{0{,}04};$$

waaruit
$$x = \frac{1000}{1{,}04^6} \times \frac{1{,}04^6 - 1}{1{,}04^{19} - 1}.$$

Men kan ook (zie onderstaande figuur), alle bedragen herleiden



tot op den 18den verjaardag; de eerste storting, groot x, wordt dan $x \,.\, 1{,}04^{18}$, de volgende $x \,.\, 1{,}04^{17}$ enz.; dus heeft men

$$x \,.\, 1{,}04^{18} + x \,.\, 1{,}04^{17} + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + x = x \,.\, \frac{1{,}04^{19} - 1}{0{,}04};$$

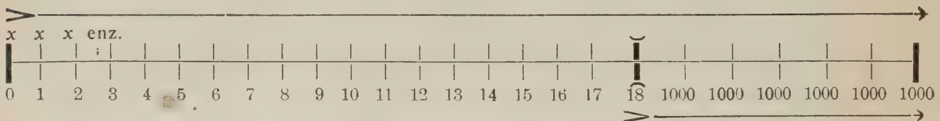
de waarde der zes uitkeeringen à f 1000 is:

$$\frac{1000}{1{,}04} + \frac{1000}{1{,}04^2} + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + \frac{1000}{1{,}04^6} = \frac{1000}{1{,}04^6} \times \frac{1{,}04^6 - 1}{0{,}04}.$$

Men heeft dus de vergelijking:

$$x \,.\, \frac{1{,}04^{19} - 1}{0{,}04} = \frac{1000}{1{,}04^6} \,.\, \frac{1{,}04^6 - 1}{0{,}04} \quad \text{en weer} \quad x = \frac{1000}{1{,}04^6} \times \frac{1{,}04^6 - 1}{1{,}04^{19} - 1}.$$

Ten derde kan men alle bedragen herleiden tot op den laatsten datum, zie de figuur:



men vindt dan $x \cdot 1{,}04^{24} + x \cdot 1{,}04^{23} + \ldots + x \cdot 1{,}04^{6} =$
$= 1000 \cdot 1{,}04^{5} + 1000 \cdot 1{,}04^{4} + \ldots\ldots + 1000;$

dus $$x \cdot 1{,}04^{6} \cdot \frac{1{,}04^{19} - 1}{0{,}04} = 1000 \frac{1{,}04^{6} - 1}{0{,}04}$$

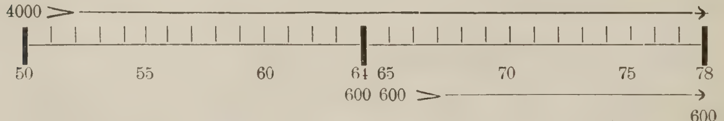
en weer $$x = \frac{1000}{1{,}04^{6}} \cdot \frac{1{,}04^{6} - 1}{1{,}04^{19} - 1}.$$

De herleidingen geven natuurlijk alle hetzelfde antwoord, toch zijn de 2e en 3e manier eenvoudiger dan de eerste; in het algemeen loopt de oplossing, waarin men zoo weinig mogelijk contante waarden berekent (in de figuur heeft men dan teruggaande pijlen), het eenvoudigst. De berekening van x in het bovenstaande vraagstuk geeft *f* 189,44.

2. *Iemand stort bij het begin van zijn 50e jaar f 4000 bij een levensverzekeringmaatschappij om, aan te vangen bij het begin van zijn 64e jaar, elk jaar een lijfrente van f 600.— te ontvangen. Hij sterft, nadat hem aan het begin van zijn 78e jaar de f 600 is uitbetaald. Hoeveel is op dat oogenblik de waarde van wat de maatschappij heeft ontvangen meer of minder dan die, van wat zij heeft uitgekeerd? Rente 4 %.*

Oplossing.

Vooraf ga weer de figuur:



De waarde der gestorte *f* 4000 is op den 78sten verjaardag $y = 4000 \times 1{,}04^{28} =$ *f* 11994,80.

De waarde der terugbetalingen op denzelfden datum is $z = 600 \times 1{,}04^{14} + 600 \times 1{,}04^{13} + \ldots\ldots + 600 =$

$$=600 . \frac{1,04^{15}-1}{0,04}=600 \times \frac{0,80095}{0,04}=15000 \times 0,80095=f\,12014,25.$$

De maatschappij heeft dus een schadepost van f 19,45.

3. *Op een gemeente rust de verplichting elk jaar aan een maatschappij 20000 gld. te betalen. Voor hoeveel kan zij deze verplichting afkoopen? De eerste storting moet over 1 jaar plaats hebben. Rente 5 %.*

Oplossing:

De contante waarde van alle stortingen, die de gemeente nog doen moet, dienen wij dus te berekenen. Blijkbaar is deze:

$$\frac{20000}{1,05}+\frac{20000}{1,05^2}+\frac{20000}{1,05^3}+\frac{20000}{1,05^4}+\ldots\ldots$$

en hebben wij hier te maken met een oneindig voortloopende afdalende meetk. reeks. Hiervan is de eerste term $\frac{20000}{1,05}$ en de reden $\frac{1}{1,05}$. Dus:

$$\text{Lim } S=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{20000}{1,05}}{1-\frac{1}{1,05}}, \text{ of}$$

$$\text{Lim } S=\frac{20000}{1,05-1}=\frac{20000}{0,05}, \text{ dus}$$

$$\text{Lim } S=400.000.$$

Voor 400.000 gld. kan de gemeente dus deze verplichting afkoopen.

Opmerking. Dat van 400.000 gld. ten eeuwige dage jaarlijks 20000 gld. afgenomen kan worden, zonder dat het kapitaal vermindert, is duidelijk, omdat de rente van 400.000 gld. à 5 % juist 20000 gld. per jaar is.

OPGAVEN.

§ 70. 1. Wat is de contante waarde van een lijfrente van 1500 gld., die 15 jaar lang op het eind van elk jaar betaald moet worden? Rente $4\frac{1}{2}$ %.

2. Een levensverzekeringmaatschappij is aan iemand een jaarlijksche lijfrente van 3000 gld. schuldig, te betalen aan het eind van elk jaar. Met hoeveel kan zij deze verplichting afkoopen, als de waarschijnlijke levensduur van dezen persoon nog 12 jaar is? Rente 5 %.

3. Hoeveel moest men op 1 Januari 1918 betalen ten einde op 31 Dec. 1925, 31 Dec. 1926 .... 31 Dec. 1930 een jaarlijksche lijfrente van 800 gld. te kunnen ontvangen? Rente 4 %.

4. Iemand heeft recht op een jaarlijksche uitkeering van 700 gld., te betalen op het eind van elk jaar, 25 jaar lang. Hij wenscht deze om te zetten in een jaarlijksche lijfrente van 600 gld. Hoe lang moet deze dan uitbetaald worden? Rente 4%.

5. Iemand moet heden *f* 3000 betalen, maar wil liever zijn schuld in 6 gelijke jaarlijksche termijnen afdoen. Hoeveel moet hij jaarlijks aflossen, als de rentevoet 4 % is en de 1e betaaldag vandaag?

6. Als iemand zich gedurende zijn verder leven een jaarlijksche lijfrente van 600 gld. wil verzekeren, moet hij nu 10000 gld. storten. Op hoe lang is zijn vermoedelijke verdere levensduur gerekend, als men den interest van het geld op 4 % 's jaars rekent en de eerste betaling der lijfrente over een jaar geschiedt?

7. Iemand is over 5 jaar 20000 gld. schuldig. Hij komt met zijn schuldeischer overeen de schuld in 10 termijnen af te doen en den eersten termijn te betalen over één jaar, den tweeden over twee jaar, enz. elken termijn één jaar na den voorgaanden. Als bovendien gegeven is, dat elke volgende betaling de helft is van de voorgaande, vraagt men naar het bedrag van de eerste betaling. Rente $3\frac{1}{2}$ %.

8. Aan iemand, die zijn huis wil verkoopen, worden drie aanbiedingen gedaan. A biedt *f* 48000, te betalen over 12 jaren; B wil gedurende 12 jaren aan het eind van ieder jaar *f* 3200 betalen; C biedt *f* 10000 contant en aan het einde van elk der eerste 7 jaren *f* 3400. Wie doet het voordeeligste bod, als men den interest van het geld op 4 % stelt?

9. A is aan B *f* 10000 schuldig, die hij over een jaar moet betalen. Hij doet de schuld af op een andere wijze, namelijk *f* 1000 terstond en vervolgens jaarlijks gedurende zes jaren telkens een gelijke som. Hoe groot is die som, als de intrest 4 ten honderd bedraagt?

10. Iemand stortte, te beginnen 31 Dec. 1881, aan het eind van elk jaar *f* 200 bij een maatschappij. Hij sterft, nadat hij dit het laatst gedaan heeft, 31 Dec. 1891. Indien nu 31 Dec.

1892 aan zijn erfgenamen *f* 2500 betaald wordt, hoeveel bedraagt dan op dat oogenblik de waarde van wat de maatschappij ontvangen heeft meer dan die *f* 2500? Rente 3 %.

11. Iemand zette 1 Jan. 1880, 1 Jan. 1881 .... tot en met 1 Jan. 1890 telkens een zelfde som *f* x op samengestelden interest, om daardoor van 1 Jan. 1900 tot en met 1 Jan. 1910 een jaarlijksche lijfrente *f* a te kunnen trekken.

Als de jaarlijksche rente $= p$ % gerekend wordt, bepaal dan x. (Opm. Dit vraagstuk kan men direct uit het hoofd oplossen).

12. Iemand bepaalt in zijn testament, dat zijn erfgenamen aan A moeten uitbetalen: na verloop van één jaar *f* 1600, na verloop van 2 jaar *f* 800, na verloop van drie jaren *f* 400, enz., ieder volgend jaar de helft van het bedrag van het vorige. De erfgenamen stellen A voor, hem aanstonds *f* 1500 te betalen, *f* 500 over een half jaar en anderhalf jaar na deze laatste uitbetaling nog *f* 1066. Indien de interest tegen 4 % wordt gerekend en A waarschijnlijk nog 20 jaar heeft te leven, moet hij dan dit aanbod aannemen of niet? (In de formule kan iets weggelaten worden, zonder dat het antwoord verandert).

13. Vier kinderen van 8, 10, 12 en 15 jaaar hebben van een oom samen *f* 50116 geërfd; hoeveel krijgt elk hiervan, als volgens de bepalingen van het testament ieder bij zijn meerderjarigheid evenveel moet hebben? Rente 4 %.

14. Een jaarlijksche uitkeering van *f* 1000 gedurende 10 jaren, aanvangende 1 Jan. 1915 wenscht men te veranderen in een halfjaarlijksche gedurende 12 jaren, eveneens aanvangende 1 Jan. 1915. Hoe groot is elke halfjaarlijksche uitkeering? Rente 4 %.

15. Een stad heeft een leening van *f* 800.000 aangegaan tegen $3\frac{1}{2}$ % rente. Hoeveel moet voor den dienst van deze leening jaarlijks op de begrooting worden uitgetrokken, als de leening gedelgd wordt in 30 gelijke termijnen, inclusief de rente?

16. Een vader laat bij zijn overlijden aan zijn 13-jarigen zoon een som van 4000 gld. na, die 4 % rente geeft. De voogd van den knaap besluit hiervan gedurende zeven jaren jaarlijks zóóveel voor de opvoeding van den jongen te besteden, dat deze op zijn

twintigste jaar van het door zijn vader nagelaten geld nog een kapitaaltje van 1000 gld. zal bezitten. Welke som kan jaarlijks voor de opvoeding besteed worden in de veronderstelling, dat de opvoedingskosten bij 't einde van ieder jaar worden betaald?

17. A leende van B op 1 Dec. 1918 tegen 4 % 's jaars *f* 700, te voldoen in 10 gelijke jaarlijksche termijnen, waarvan de eerste betaling geschiedde den 1[en] December 1919. C wil op 1 Augustus 1922 de vorderingen van B op A overnemen. Welk bedrag moet C dan aan B betalen?

18. Iemand stortte op zijn twintigsten verjaardag *f* 5000 bij een verzekeringsmaatschappij. Daardoor genoot hij een jaarlijksch pensioen van *f* 1400; op zijn 50[sten] verjaardag de eerste uitkeering. Als hij nu, na 15 uitkeeringen ontvangen te hebben, sterft, hoeveel heeft dan op dat oogenblik die maatschappij gewonnen of verloren? Rentevoet 5 %.

19. Iemand bezit een lijfrente van 500 gld., die gedurende 20 jaar aan het eind van elk jaar betaalbaar is. Hij zet deze om in een eeuwigdurende rente. Hoe groot zal deze zijn? Rente $4\frac{1}{2}$ %.

20. Tot vorming van een kapitaal wordt gedurende 15 jaar aan het begin van elk jaar 1000 gld. gestort Dit moet met de rente à 5 % aan het begin van elk der eerstvolgende 20 jaren in gelijke sommen uitgekeerd worden. Hoe groot is die jaarlijksche uitkeering?

21. Iemand neemt op 1 Januari 1923 een hypotheek van 20000 gld. Hij moet daarvoor bij den aanvang van elk volgend jaar, te beginnen 1 Januari 1904, een vaste som terugbetalen, waardoor na 25 stortingen de schuld, met inbegrip van de rente, afgelost is. Als hij tegelijk met de 15[e] storting tevens de dan nog overblijvende schuld in ééns aflost, hoeveel betaalt hij dan op dat tijdstip? Rente $4\frac{1}{2}$ %.

22. Iemand leent *f* 10000 à 4 %; deze som moet afgelost worden in 8 jaar in gelijke termijnen inclusief de rente (annuïteiten) maar aan het eind van het 5[e] jaar word de rente gebracht

op $3^1/_2$ %. Hoeveel was hij na de 5e betaling nog schuldig? Hoeveel moet hij aan het eind van elk der 3 laatste jaren nog betalen?

23. Een vader wil, te beginnen 1 Januari 1894, voor zijn zoon, die op dien datum 6 jaar oud is, ieder jaar bij het begin van het jaar een gelijk bedrag bij een bank op samengestelden interest zetten, opdat deze aan den zoon, als hij op den leeftijd van 18 jaren bereikt heeft, gedurende 6 achtereenvolgende jaren bij het begin van elk jaar een bedrag van 1400 gld. zal uitbetalen. Indien nu de laatste storting van den vader samenvalt met de eerste uitbetaling van de bank aan den zoon, hoeveel bedraagt dan die storting? Rente 4 %.

24. Iemand, geboren 20 Juni 1860, stort op 20 Juni 1900 bij een maatschappij van levensverzekering 5000 gld., om telken jare van 20 Juni 1921 af, op zijn verjaardag een lijfrente van 700 gld. te hebben. De maatschappij zet het geld uit à $3^1/_2$ %. Indien de verzekerde 20 Juni 1938 sterft, nadat hij den 18den termijn ontvangen heeft, hoeveel wint of verliest dan de maatschappij?

25. Wat is de gemiddelde vervaldag van drie geldsommen opv. *f* 1000, *f* 3000 en *f* 2500 en vervallende over 10 jaar, 15 jaar en 30 jaar? (Reken van af 1 Jan. 1914; 6 % rente).

26. Aan het bezit van een landgoed is de verplichting verbonden, elke 15 jaar een som van *f* 1200 uit te keeren aan een stichting. Met welk bedrag kan die verplichting afgekocht worden, 5 jaar voordat een nieuwe uitkeering plaats moet hebben, als er 4 % samengestelde interest gerekend wordt?

27. Op een gemeente rust de voortdurende verplichting jaarlijks, te beginnen met 1 Jan. 1906, 8000 gld. te betalen. De gemeente wil die schuld afdoen door op 1 Jan. 1906, 1 Jan. 1907 enz. 20000 gld. te betalen. Wanneer zal de schuld gedelgd zijn en hoeveel bedraagt de laatste aflossing? Rentevoet 4 %.

28. Iemand, oud 40 jaar, sluit een contract met een levensverzekeringmaatschappij, dat bij zijn overlijden aan zijn erven

10240 gld. zal worden uitgekeerd. Hij betaalt hiervoor terstond 1596 gld., en verder na verloop van ieder jaar 216 gld. Als de maatschappij in staat is voor de kapitalen, die zij beheert, 3 % rente uit te keeren, op hoeveel jaren stelt zij dan den vermoedelijken levensduur van den veertigjarige?

29. Een leening van *f* 80.000 wordt terugbetaald met 4 annuïteiten; rente 6 %. Maak het plan van aflossing; dit moet naast elkaar hebben de kolommen: Schuld bij het begin; rente; aflossing.

VARIATIES, PERMUTATIES EN COMBINATIES.

§ **71.** *Bepaling.* De verschillende manieren, waarop *m* grootheden in een bepaalde volgorde genomen kunnen worden van uit *n* grootheden, noemt men de **variaties van *n* grootheden, *m* aan *m*.**

Dus zijn twee variaties alleen gelijk, als ze dezelfde grootheden op dezelfde wijze gerangschikt bevatten.

Denk bijv. vier grootheden *a*, *b*, *c* en *d*.

Wanneer wij hiervan telkens één nemen, dan komen er 4 variaties, nl. *a*, *b*, *c* en *d*;

nemen we ze echter twee aan twee, dan 12 variaties, nl.:

ab, *ac*, *ad*, *ba*, *bc*, *bd*, *ca*, *cb*, *cd*, *da*, *db*, *dc*.

Om het aantal variaties drie aan drie te bepalen, gaan wij als volgt te werk: Neem elk van de zooeven opgeschreven variaties twee aan twee en schrijf achter elk één der twee letters, die niet in de variatie voorkomen, dan zullen wij op deze wijze **alle** variaties drie aan drie verkrijgen. Het aantal variaties van 4 grootheden 3 aan 3 (V_4^3) is dus gelijk aan tweemaal het aantal variaties van 4 grootheden 2 aan 2 (V_4^2), dus $V_4^3 = 2 \times 12 = 24$.

§ **72.** Op een dergelijke wijze kunnen wij ook het aantal variaties van *n* grootheden *p* aan *p* (V_n^p) bepalen.

Stel de grootheden voor door *a*, *b*, *c*, ...

We gaan uit van het aantal variaties van *n* grootheden 1 aan 1; dit is *n*.

Schrijf nu achter elk der aldus verkregen variaties een andere letter. De 2e plaats kan zoo op $n - 1$ verschillende wijzen ingevuld worden achter elke letter. Dus zijn er $n(n - 1)$ verschillende manieren, waarop de beide grootheden geschreven kunnen worden; dus $V_n^2 = n(n - 1)$.

Op een dergelijke wijze kunnen wij bewijzen:

$$V_n^3 = n(n-1)(n-2)$$
$$V_n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$V_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-p+1).$$

Opmerkingen: 1e. Er staan p factoren in V_n^p.

2e Wanneer wij de variaties vragen van n grootheden n aan n, dan vinden wij:

$$V_n^n = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 3\,.\,2\,.\,1.$$

Het product van de eerste n geheele getallen wordt gewoonlijk voorgesteld door $n!$ en gelezen n **faculteit**, zoodat men heeft $V_n^n = n!$

De variaties van n grootheden n aan n noemt men ook dikwijls de permutaties dier grootheden. Onder de **permutaties** van n grootheden verstaan wij dus de verschillende groepen, die wij van deze grootheden kunnen maken; deze verschillen dus enkel in volgorde. Wij stellen het aantal permutaties van n grootheden gewoonlijk voor door P_n;

dus $$P_n = V_n^n = n!$$

Voorbeelden. 1. *Op hoeveel verschillende manieren kunnen* 5 *ballen op een rij gelegd worden?*

Het gevraagde aantal is $P_5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120.$

2. *Hoeveel verschillende getallen van 3 cijfers kunnen we maken van de cijfers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7? Elk cijfer mag in elk getal slechts éénmaal voorkomen.*

Het gevraagde aantal is $V_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210.$

OPGAVEN.

§ **73.** 1. Schrijf de permutaties op van de elementen a, b, c en d. Voeg aan elke permutatie de letter e toe; op hoeveel plaatsen kan dat? Leid hieruit het verband af tusschen P_4 en P_5.

2. Hoeveel woorden van drie letters zou men hoogstens kunnen maken uit de letters van het woord „piano", en van „schrijfboek".

3. Aan een spoorlijn liggen 20 stations; op elk der stations kan men een biljet 1^e, 2^e en 3^e klas naar elk der andere stations koopen. Hoeveel verschillende kaartjes moet de spoorwegmaatschappij laten drukken?

4. Hoeveel getallen van vier cijfers kan men maken met de cijfers 4, 5, 2, 0; van zes cijfers met 0, 1, 2, 3, 4, 5?

5. Bepaal de som der getallen, die men kan maken met de cijfers 4, 5, 6 en 7.

6. Als men alle permutaties van de letters a, b, c, d, e, f, g en h regelmatig opschrijft, welke is dan de 50ste, de 500ste, de 5000ste, de 40000ste?

7. Tien heeren, die dagelijks in een restaurant samen eten en een gesloten kring vormen, nemen zich voor elken dag in een andere volgorde te gaan zitten; na hoeveel dagen zullen ze weer in dezelfde volgorde zitten?

8. Men schrijft op 3 hoofdletters, 6 medeklinkers en 4 klinkers. Op hoeveel manieren kan een woord gemaakt worden, beginnende met een hoofdletter, terwijl het verder nog moet bevatten 3 medeklinkers en 2 klinkers?

§ **74**. Wanneer zich onder de n grootheden, waarvan de variaties of de permutaties gevraagd worden, eenige gelijke bevinden, zooals b.v. bij: a, a, a, b en c, dan geven wij die grootheden eerst verschillende indices a_1, a_2, a_3, b en c en bepalen het aantal permutaties.

Er zijn nu telkens 6 permutaties, die gelijk worden, als we de indices weglaten.

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & b & c \\ a_1 & a_3 & a_2 & b & c \\ a_2 & a_1 & a_3 & b & c \\ a_2 & a_3 & a_1 & b & c \\ a_3 & a_1 & a_2 & b & c \\ a_3 & a_2 & a_1 & b & c \end{matrix}$$

Het zijn de permutaties van a_1, a_2, a_3, waarachter b en c gevoegd zijn; door weglating van de indices gaan deze alle 6

over in *aaabc*, zoodat er P_3 permutaties *aaabc* zijn. Evenzoo kan men alle permutaties van a, a, a, b en c vereenigen in groepen van P_3 permutaties, die gelijk zijn, waaruit dus volgt, dat het aantal permutaties van 5 grootheden, waaronder 3 gelijke voorkomen, gelijk is aan

$$\frac{P_5}{P_3} = \frac{5!}{3!}.$$

Op een dergelijke manier vindt men voor het aantal permutaties van n grootheden, waaronder m gelijke:

$$\frac{P_n}{P_m} = \frac{n!}{m!}$$

Zijn er behalve de m gelijke grootheden, bovendien onder de overige nog p gelijke, dan is het aantal permutaties:

$$\frac{n!}{m!\,p!}.$$

OPGAVEN.

§ **75**. 1. Op hoeveel manieren kan men de letters van het woord „vandaag" permuteeren? Ook van „Mississippi" en van „negentallig"?

2. Bepaal, hoeveel verschillende getallen gevormd kunnen worden met de cijfers 1, 2, 2, 2, 3 en 4.

3. Op hoeveel manieren kan men 5 centen, 6 stuivers en 4 dubbeltjes uitdeelen onder 15 kinderen, zóó dat elk kind één geldstukje ontvangt?

4. Teeken een rechthoek ABCD met drie lijnen // AB en vier // AD; als men nu gaat van A naar C langs verschillende wegen, op hoeveel manieren kan dit dan wel?

5. Op hoeveel manieren kan men in het volgende het woord „Rotterdam" lezen:

R o t t e
o t t e r
t t e r d
t e r d a
e r d a m.

§ **76**. De verschillende manieren, waarop een groep van p grootheden genomen kan worden uit n grootheden, zonder op de volgorde te letten, worden de **combinaties** van die n grootheden p aan p genoemd.

Men stelt dit aantal voor door C_n^p.

Van de 4 grootheden a, b, c en d zijn b.v. de combinaties 1 aan 1: a, b, c en d; de combinaties 2 aan 2: *ab*, *ac*, *ad*, *bc*, *bd*, *cd*; de combinaties 3 aan 3: *abc*, *abd*, *acd*, *bcd*; de combinaties 4 aan 4: alleen *abcd*.

Het aantal combinaties van n grootheden p aan p vindt men als volgt: $C_n^2 = \frac{1}{2} \times V_n^2$, want als we alle variaties van n grootheden opschrijven, dan zal bij elke variatie (b.v. *ab*) een andere (*ba*) behooren, die dezelfde letters bevat en dus eenzelfde combinatie vormt. Om dus C_n^2 te vinden, behoeven we slechts V_n^2 door 2 te deelen. Om C_n^3 te bepalen, beschouwen we weer V_n^3; onder deze variaties zijn er telkens 6, die dezelfde combinatie vormen b.v. *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab* en *cba*. We kunnen zoo het geheele aantal variaties in groepen van 6 ($= P_3$) verdeelen, die tot eenzelfde combinatie aanleiding geven; dus:

$$C_n^3 = \frac{V_n^3}{P_3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}.$$

We kunnen in het algemeen zeggen: Elke combinatie van C_n^p, die gevormd is, kunnen wij door permutatie der letters omzetten in P_p variaties. Dus:

$$P_p \times C_n^p = V_n^p,$$

$$C_n^p = \frac{V_n^p}{P_p} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-p+1)}{p!}.$$

Voorbeeld: Op hoeveel manieren kan een bestuur van 3 personen gekozen worden uit een vereeniging van 24 personen?

Het aantal is $C_{24}^3 = \frac{24 \times 23 \times 22}{1 \times 2 \times 3} = 2024.$

OPGAVEN.

§ **77.** 1. Bewijs, dat $C_n^{n-p} = C_n^p$.

2. Bij een verkiezing zijn er 5 candidaten voor 2 plaatsen; op hoeveel verschillende manieren kan elke kiezer zijn stem uitbrengen?

3. Een paardenkoopman heeft 8 bruine paarden, 5 zwarte en nog 7 schimmels; een heer vraagt hem 12 paarden te zenden, 4 van elke kleur. Op hoeveel manieren kan aan dezen last voldaan worden?

4. Tweemaal het aantal combinaties 4 aan 4 van n elementen is 35 maal het aantal combinaties 3 aan 3 van $\frac{1}{2}n$ elementen; bepaal n.

5. Het aantal combinaties 7 aan 7 van n is $\frac{5}{7}$ van het aantal 5 aan 5 van n; bepaal n.

6. Als $N = C_n^2$, bewijs dan, dat $C_N^2 = 3 \times C_{n+1}^4$.

7. Op hoeveel manieren kan een luitenant uit 3 sergeants, 8 korporaals en 12 soldaten een wacht vormen, die moet bestaan uit 1 sergeant, 2 korporaals en 5 soldaten?

8. Men vraagt de verhouding $C_{n-1}^{r-1} : C_n^r$.

9. Als gegeven is $C_n^5 = C_n^{10}$, bepaal dan C_n^2.

10. Op hoeveel manieren kan uit 25 jongens een elftal gevormd worden, als 6 ervan er bepaald in moeten voorkomen en 5 in geen geval genomen worden?

11. Twaalf leden van een roeivereeniging moeten uitkomen met een 8-riems giek, zoodat er 8 roeiers en 1 stuurman noodig zijn. Nu worden er slechts twee in staat geacht, behoorlijk te sturen; op hoeveel manieren zal men de boot kunnen bemannen?

12. Iemand heeft een gouden tientje, een rijksdaalder, een gulden, een kwartje, een dubbeltje en een cent. Hoeveel verschillende sommen kan hij hiermee betalen?

13. Men leert $\sqrt{9} = \pm 3$; eenige jongens moeten nu uitrekenen $\sqrt{9} + \sqrt{16} + \sqrt{25} + \sqrt{36} + \sqrt{49}$ en nemen daartoe geheel willekeurig de teekens; hoeveel antwoorden kunnen ze dan wel krijgen?

BINOMIUM VAN NEWTON.

§ **78.** Het gedurig product

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)(x+a_4)$$

wordt na vermenigvuldiging:

$$x^4+(a_1+a_2+a_3+a_4)x^3+(a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+a_2a_3+a_2a_4+$$
$$+a_3a_4)x^2+(a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+a_1a_3a_4+a_2a_3a_4)x+a_1a_2a_3a_4.$$

Wij kunnen dit resultaat ook door redeneering vinden; het geheele product bestaat toch uit de som van een aantal gedeeltelijke producten, waarvan elk gevormd wordt door 4 letters te vermenigvuldigen, waarvan er één uit elk der 4 factoren genomen wordt. Als wij nu onderzoeken, op welke manier de verschillende gedeeltelijke producten gevormd zijn, dan vinden we, dat:

1e de term x^4 gevormd wordt door de letters x uit elk der factoren te nemen;

2e de termen met x^3 gevormd worden door de letter x uit 3 der factoren te nemen, op elke mogelijke manier, en één der letters a_1, a_2, a_3 of a_4 uit de overblijvende factoren;

3e de termen met x^2 gevormd worden door de letter x uit 2 der factoren te nemen op elke mogelijke manier en 2 van de letters a_1, a_2, a_3 en a_4 uit de overblijvende factoren;

4e de termen met x gevormd worden door de letter x te nemen uit één der factoren en 3 der letters a_1, a_2, a_3 en a_4 uit de overblijvende factoren;

5e de term zonder x het product is van de 4 getallen a_1, a_2, a_3 en a_4.

Wanneer we veronderstellen, dat $a_1=a_2=a_3=a_4=a$ is, dan vinden wij dus:

$$(x+a)^4=x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4.$$

§ **79.** Op een dergelijke manier kunnen wij $(x+a)^n$ vinden. Daartoe beschouwen wij eerst het product:

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(x+a_n).$$

Elke term van het product zal van den n^{en} graad zijn en gevormd worden door n letters te vermenigvuldigen, waarbij telkens één letter genomen wordt uit elk der factoren.

De hoogste macht van x is x^n, gevormd door de letter x uit elk der factoren te nemen.

De termen met x^{n-1} worden gevormd door de letter x uit $n-1$ der factoren te nemen en één der letters $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ uit de overblijvende factoren; dus is de coëfficiënt van x^{n-1} de som der letters $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$.

De termen met x^{n-p} worden gevormd door de letter x uit $n-p$ der factoren te nemen en p der letters $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ uit de overblijvende factoren; de coëfficiënt van x^{n-p} is de som der producten van de letters $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ telkens p tegelijk genomen. De laatste term is het product $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$.

Veronderstel nu weer, dat $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = a$ is, dan wordt de coëfficiënt van $x^{n-1} = C_n^1 \times a = na$.

„ „ „ „ $x^{n-2} = C_n^2 \times a^2 = \dfrac{n(n-1)}{1.2} a^2$.

„ „ „ „ $x^{n-p} = C_n^p \times a^p =$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} a_p.$$

Dus:

$$(x+a)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 + C_n^3 x^{n-3} a^3 + \dots$$

$$\dots + C_n^{n-2} x^2 a^{n-2} + C_n^{n-1} x a^{n-1} + C_n^n a^n.$$

$$= x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} a + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} a^2 +$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^{n-3} a^3 + \dots + a^n.$$

Voorbeeld:

$$(x+a)^8 = x^8 + \frac{8}{1} x^7 a + \frac{8.7}{1.2} x^6 a^2 + \frac{8.7.6}{1.2.3} x^5 a^3 + \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} x^4 a^4 +$$

$$+ \frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5} x^3 a^5 + \frac{8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6} x^2 a^6 + \frac{8.7.6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5.6.7} x a^7 +$$

$$+ \frac{8.7.6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6.7.8} a^8 =$$

$$= x^8 + 8x^7 a + 28 x^6 a^2 + 56 x^5 a^3 + 70 x^4 a^4 + 56 x^3 a^5 +$$

$$+ 28 x^2 a^6 + 8 x a^7 + a^8.$$

Opm. 1. De ontwikkeling van $(x+a)^n$ bestaat uit $n+1$ termen.

2. De binomiaalcoëfficiënten hebben nog een merkwaardige eigenschap. In § 77 vraagstuk 1 hebben wij bewezen, dat $C_n^{n-p} = C_n^p$ is. We hebben gezien, dat:

$$(x+a)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1}a + C_n^2 x^{n-2}a^2 + C_n^3 x^{n-3}a^3 + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + C_n^{n-2}x^2a^{n-2} + C_n^{n-1}xa^{n-1} + C_n^n a^n.$$

Daar $C_n^1 = C_n^{n-1}$, $C_n^2 = C_n^{n-2}$, $C_n^3 = C_n^{n-3}$ enz., volgt hieruit, **dat de coëfficiënten van twee termen, die evenver van de uiterste termen verwijderd zijn, even groot zijn.**

OPGAVEN.

§ **80.** 1. Schrijf de ontwikkeling op van:
$(x+a)^7$; $(x-a)^6$; $(x^2-p^2)^{10}$; $(2x+3y)^5$.

2. $\left(1+\frac{x}{2}\right)^4$; $\left(ax+\frac{b}{a}\right)^7$; $\left(a-\frac{b}{3}\right)^5$; $\left(2a+\frac{b}{2}\right)^6$.

3. Wat is de 3^e term van $(x+1)^{10}$?

4. „ „ „ 8^e „ „ $(1-x)^{12}$?

5. „ „ „ middelste term van $(3x-2y)^8$?

6. Toon aan, dat in de ontwikkeling van $(1+x)^{m+n}$ de coëfficiënten van x^n en x^m gelijk zijn.

7. Bepaal met behulp van het binomium de waarde van 99^3 en 999^4.

8. Bepaal den grootsten term van $(1+\frac{5}{16}x)^{12}$, als $x=2$ is.

9. Wat is de grootste term in de ontwikkeling van $(1+2x)^n$, als $x=\frac{1}{3}$ en $n=9$ is?

10. Wat is de middelste term van $(1+x)^{2n}$?

11. Als men $(x+a)^4$ uitschrijft, bemerkt men, dat de som der coëfficiënten gelijk is aan $16=2^4$; bij $(x+a)^5$ is die som 2^5 enz. Bewijs, dat de som der coëfficiënten van $(x+a)^n$ gelijk is aan 2^n.

12. Welke term van $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^6$ is onafhankelijk van x?

EINDEXAMEN-OPGAVEN VAN VERSCHILLENDE GYMNASIA IN 1921.

(Elk twee- tot viertal vraagstukken, door een kleine spatie en een streepje aangewezen, vormt een stel opgaven).

A.

§ **81.** 1. Van de vergelijking $2x^2 - (a+1)x + a = -3$ verschillen de wortels 1. Bereken die wortels en de waarde van a.

2. Trek den vierkantswortel uit:

$$11 - 12x^{-2/3} - 3x^{2/3} + 4x^{-4/3} + {}^1/_4 x^{4/3}.$$

3. Los x en y op uit: $\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - 2y = 3 - 2xy \\ x^2 = 5 - y^2. \end{cases}$

---

4. De lengte van een rivier tusschen twee plaatsen A en B, aan die rivier gelegen, bedraagt 45 KM. Een stoomboot vaart van A naar B en weer terug in 16 uren. Als de snelheid van den stroom $1\frac{1}{2}$ KM per uur bedraagt, hoe groot is dan de snelheid van de boot in stilstaand water?

5. Bepaal alle stellen waarden van x en y, die voldoen aan de vergelijkingen:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 2x - 1 = 0, \\ y^2 - 2xy + 2y - 1 = 0. \end{cases}$$

6. Wanneer x_1 en x_2 de wortels zijn van de vergelijking

$$6x^2 + xa + 10 = 0$$

en gegeven is $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 4\frac{1}{60}$, wat is dan a?

---

7. Een wielrijder moet een weg van 30 KM afleggen. Als hij per uur 3 KM méér aflegde, dan zou hij over een weg, die 24 KM langer is, 1 uur meer tijd besteden. Wat is zijn snelheid?

8. Van welke vierkantsvergelijking is het verschil der wortels $= 8$ en de som van de 2e machten der wortels $= 50$?

9. Schrijf als machten van 8 (met gebroken en negatieve exponenten) en los daarna x op:

$$\sqrt[3]{16^{x+2}} : 2^{-6x-3} = \frac{32^{4x}}{8^3}.$$

---

10. Van de vergelijking $x^2 - x\sqrt{a+14} + 1 = 0$ noemt men de wortels x_1 en x_2.

Indien $x_1^2 - x_2^2 = 8\sqrt{a+1}$ is, bepaal dan a door gebruik te maken van $x_1 + x_2$ en $x_1 x_2$.

11. Herleid, door alleen gebruik te maken van de regels der exponenten (dus zonder wortelvormen in te voeren):

$$\frac{(a^{1/2} - 2a^{1/4}b^{1/4} + b^{1/2})^{1/4}\,(a^{1/2} - b^{1/2})\,(a - 2a^{1/2}b^{1/2} - 3b)}{(a^{3/4} + a^{1/2}b^{1/4} - 3a^{1/4}b^{1/2} - 3b^{3/4})\,(a^{3/4} - a^{1/2}b^{1/4} + a^{1/4}b^{1/2} - b^{3/4})}$$

tot $(a^{1/4} - b^{1/4})^{1/2}$.

12. Tusschen welke grenzen liggen de waarden, die y *niet* kan aannemen, als men in $y - 1 = \frac{x^2+4}{x}$ x alle mogelijke bestaanbare waarden laat aannemen?

---

13. x oplossen uit:

$$\sqrt{(2x+36)} - \sqrt{(1+x)} = \sqrt{(25-x)}.$$

14. Als $x = 1$ één der wortels is van de vergelijking $x^3 - 2x^2 - x + A = 0$, hoeveel is dan A en welke zijn de andere wortels?

15. x en y oplossen uit:

$$x^2 + y^2 + xy = 37 \text{ en } x^2 + y^2 - xy = 13.$$

---

16. Herleid tot de eenvoudigste gedaante:

$$\left\{\frac{4+2\sqrt{3}}{6-\sqrt{(16+8\sqrt{3})}}\right\}^{-1/2} + \left\{\frac{4-2\sqrt{3}}{6+\sqrt{(16-8\sqrt{3})}}\right\}^{-1/2}.$$

17. Bepaal de waarden van A en B, als de wortels van de vergelijking $x^2 + 5x - 36 = 0$ elk 3 grooter zijn dan die van de vergelijking $y^2 + (2A - B)y + AB = 0$.

18. x en y oplossen uit:

$$\sqrt{\frac{x^2+3}{y^2+5}} + \sqrt{\frac{y^2+5}{x^2+3}} = 2^1/_6 \text{ en } x^2 + y^2 = 5.$$

---

19. Trek den vierkantswortel uit:

$$\tfrac{4}{9}a^2 - \tfrac{4}{3}a^{1\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + ab + \tfrac{8}{3}ab^{-\frac{1}{2}} - 4a^{\frac{1}{2}} + 4b^{-1}.$$

20. Voor welke waarden van x is $3x^2 - x - 10$ negatief?

21. Ontbind in twee factoren van den eersten graad:

$$x^2 + 2xy + xz - 3y^2 + 7yz - 2z^2.$$

22. Als x_1 en x_2 de wortels zijn van de vergelijking

$$x^2 - 4x + q = 0 \text{ en}$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (14 + 6\sqrt{5})^{\frac{1}{2}} + (14 - 6\sqrt{5})^{\frac{1}{2}} + 22,$$

bereken dan q.

---

23. Als van de wortels p en q van de vergelijking $3x^2 + ax - 5 = 0$ gegeven is, dat $\frac{p}{q} + \frac{q}{p} = -15\frac{1}{15}$, bepaal dan a.

24. Los x en y op uit: $3\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{y}} = 3$; $2\sqrt{y} - \frac{3}{\sqrt{x}} = 10$.

25. Welke waarde kan de vorm $\frac{x^2 - 5x + 1}{x^2 - x + 1}$ voor x reëel *niet* aannemen? Licht dit grafisch toe.

---

26. Bepaal de wortels van de vergelijking:

$$x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 22x + 24 = 0.$$

27. Ontbind in factoren:

$$2x^2 + 3x\sqrt{3} - 7x\sqrt{2} + 9 - 4\sqrt{6}.$$

28. Welke reëele waarden van x en y voldoen aan het stel vergelijkingen:

$$(x + y)(x^2 + y^2) = 232 \text{ en } xy(x + y) = -84.$$

---

29. Los x op uit:

$$6x^4 - 7x^3 - 73x^2 + 14x + 24 = 0.$$

30. Ontbind in factoren:

$$6x^2 - xy - y^2 - yz + 7xz + 2z^2.$$

31. Welke waarden van x en y voldoen aan:

$$x + y + \sqrt{x + y} = 30 \text{ en } x^2 + y^2 = 337.$$

---

32. Welke waarden van x voldoen aan de vergelijking:

$$\sqrt[3]{9 - x} + \sqrt[3]{15 + x} = 2\sqrt[3]{3}.$$

33. Herleid $\left(\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{11+3\sqrt{6}+\sqrt{15}}{2}\right)^{1/2}$.

34. De wortels van de vergelijking

$$x^2-4x+2x\sqrt{5}+8-4\sqrt{5}=0$$

zijn x_1 en x_2. Bepaal, zonder deze vergelijking op te lossen, de vierkantsvergelijking, waarvan de wortels zijn: $x_1^2+x_2^2$ en $(x_1-x_2)^2$.

---

35. Herleid: $\sqrt{9\sqrt{7}-4\sqrt{35}}+\sqrt{6\sqrt{35}+14\sqrt{7}}$.

36. Los x op uit: $(x-5)^2+6\sqrt{x^2-10x+22}=10$.

37. Welke betrekking bestaat er tusschen a, b en c, als de vergelijkingen $x^2+(a+1)x+c=0$ en $x^2+(a-1)x+b=0$ een wortel gemeen hebben?

---

38. Ontbind den vorm $x^3-(a+1)x^2-a^2x+a^2(a+1)$ in factoren van den eersten graad, als gegeven is, dat deze vorm voor $x=-a$ nul wordt.

39. Gegeven de vergelijking $ax^2+bx+c=0$, wier wortels x_1 en x_2 genoemd worden.
Stel op 2 manieren de vergelijking samen, wier wortels y_1 en y_2 aldus van x_1 en x_2 afhangen:

$$y_1=\frac{1}{x_1+p},\quad y_2=\frac{1}{x_2+p}.$$

Bij de eerste manier gebruik maken van x_1+x_2 en x_1x_2.
Bij de tweede manier daarvan geen gebruik maken.

40. Beschouw de getallen van 3 cijfers, waarin het cijfer der tientallen evenveel *minder* is dan het cijfer der honderdtallen als het *méér* is dan het cijfer der eenheden. Stel het cijfer der tientallen voor door t en zijn verschil met het cijfer der eenheden door v.
Verwissel nu in zulk een getal de cijfers van honderdtallen en eenheden en geef dan door een formule aan, hoe de verhouding van het oorspronkelijke getal tot het nieuwe getal afhangt van $\frac{t}{v}$. Toon daarna aan, dat de grootste waarde van de verhouding van het oorspronkelijke getal tot het nieuwe getal $\frac{35}{2}$ is.

---

41. Gegeven de vergelijking:

$$x^2 - 5(a - b)x + 6a^2 - 13ab + 6b^2 = 0.$$

Bepaal *zonder* oplossing dezer vergelijking de som van de kwadraten der wortels en toon dan aan, dat deze som niet kleiner dan $2ab$ kan zijn.

42. Van de twee vergelijkingen:

$$x^2 - (a + 1)x + 3 = 0$$

en $y^2 - (a + 2)y + 6 = 0$

is gegeven, dat een der wortels der eerste vergelijking de helft is van een der wortels der tweede vergelijking. Bereken a.

43. Uit A vertrekt een fietser naar B; gelijktijdig vertrekt uit een, in de richting van B gelegen, punt C een wandelaar eveneens naar B. De afstand AC = 8 KM. Als de fietser den wandelaar na 40 minuten inhaalt en als de fietser over 1 KM $11^1/_4$ minuut korter doet dan de wandelaar, hoe ver ligt dan het punt van A, waar de fietser den wandelaar inhaalt?

---

44. Ontbind in factoren:

$$10x^2 + xy - 2y^2 + x + 5y - 3.$$

45. Voor welke waarde van x bereikt de functie $y = 2x^2 - 12x + 11$ een maximum of minimum en welk is dat maximum of minimum? Geef een graphische voorstelling van de functie.

46. A en B vertrekken tegelijk uit P en Q, A per fiets en B te voet en ontmoeten elkaar 45 KM voorbij het midden van den weg. Na de ontmoeting heeft A nog 3 uur noodig om Q te bereiken, B 27 uur om in P te komen. Hoe lang was de weg?

---

47. Los x op uit de vergelijking:

$$x^2 - 2\tfrac{1}{4}bx + 72 = 0,$$

als b harmonisch middelevenredig is tusschen de wortels.

48. Los x op uit de vergelijking:

$$\sqrt[3]{(2x + \sqrt{3})} - \sqrt[3]{(x - \sqrt{3})} = \sqrt{3}.$$

49. A en B brengen *f* 1000 bijeen om gezamenlijk handel te drijven. A treedt na 5 maanden uit en krijgt aan kapitaal en winst *f* 420. B, die 9 maanden in dien handel betrokken geweest is, heeft recht op *f* 654. Bereken ieders inleg.

---

50. Wanneer men de wortels der vergelijking $2x^2 - 4x + a = 0$ met 5 vermeerdert, verhouden zich deze nieuwe getallen als 5 tot 1. Bepaal a.

51. Los x op uit: $3x^2 - x + 5\sqrt{(3x^2 - x + 5)} = 19$.

52. Los x en y op uit: $\begin{cases} x^2 - 6xy + 9y^2 - 16 = 0 \\ x^2 + xy - y^2 - 7x - 6 = 0 \end{cases}$

---

53. Aan welke voorwaarden moet m voldoen, opdat de wortels van de vergelijking $x^2 - 20mx + 16m^2 + 30m + 6$ toegevoegd complex zijn?

54. Los x op uit: $6x^5 - x^4 - 43x^3 + 43x^2 + x - 6 = 0$.

55. Vereenvoudig: $\left(\frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right)^{1/2} - \frac{2\sqrt{3}}{2 - \sqrt{7} + \sqrt{3}}$.

---

56. Gegeven $x^2 + 2ax + a = 0$.
Bepaal a zoo, dat de som van de kwadraten der wortels van die vergelijking minimum is.

57. Bereken de waarde van $\frac{p + q}{q - p} + \frac{q + r}{q - r}$ als p, q en r een harmonische evenredigheid vormen.

58. Twee lichamen gaan elkaar te gemoet over een weg, die 420 M lang is. Vertrekt het 1e lichaam 12 minuten vroeger dan het 2e, dan ontmoeten zij elkaar midden op den weg. Bij gelijktijdig vertrek zouden zij na 15 minuten nog 240 M van elkaar verwijderd zijn. Bepaal de snelheid van ieder lichaam.

---

59. Ontbind in factoren:

$$2x^4 - 13x^3 + 24x^2 - 13x + 2.$$

60. Herleid: $\frac{3\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} \times (33 - 2\sqrt{200})^{1/2}$.

61. Wat zijn de waarden van a en b, als men weet, dat

$$x^3 + (a+b)x^2 + (b^2 - 57)x + 3b - 5$$

gedeeld door $x^2 + x + 1$ tot rest geeft $12x - 5$?

62. In een rivier met een stroomsnelheid van 30 M per minuut legt een zwemmer een afstand van 420 M heen en terug in 48 minuten af. Hoe groot is de snelheid van den zwemmer in stilstaand water?

---

63. Los op: $(3x+2)(x+2) + 6\sqrt{(3x^2+8x+5)} = 39$.

64. Herleid: $\sqrt{[-\sqrt{3} + \sqrt{\{3 + 8\sqrt{(7+4\sqrt{3})}\}}]}$.

65. Voor welke waarden van a en b zijn de wortels van de vergelijking $x^2 - (3a+1)x + 2b - 4 = 0$, 5 kleiner dan die van $x^2 - (2b+1)x + 31a + 10 = 0$?

66. Een goederentrein en een sneltrein rijden elkaar uit de steden P en Q te gemoet. De goederentrein vertrekt $2^1/_2$ uur vroeger en komt even laat in Q aan als de sneltrein in P. Als de ontmoeting plaats heeft 2 uur na 't vertrek van den sneltrein, hoelang heeft dan elk over den heelen weg gedaan?

A en B.

§ **82.** 1. Twee lichamen A en B bevinden zich op de beenen van een rechten hoek C, elk op 25 M afstand van het hoekpunt. Zij bewegen zich tegelijk met snelheden van 4 en 3 M per seconde in de richting van het hoekpunt.
Na hoeveel sec. is hun lineaire afstand een minimum?
Hoe groot is dat minimum en op welken afstand van C bevindt zich dan het lichaam A?

2. Herleid: $\sqrt{x - 2\sqrt{2x-4}} - \sqrt{x + 2\sqrt{2x-4}}$.

3. Welke waarden moet p hebben in:

$$x^2 - (p+1)x + p^2 - p = 0,$$

opdat de wortels dezer vergelijking zich verhouden als $1:2$?

---

4. Bepaal in de vergelijking $2x^2 + 2ax - 8x - 3a + 10 = 0$ a zoodanig, dat de som van de kwadraten der wortels 20 is.

5. Herleid:

$$\sqrt{12+6\sqrt{3}}-\sqrt{12-6\sqrt{3}}-4\left\{1+\frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\right.$$
$$\left.-\frac{24}{\sqrt{6}+2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}\right\}^{-1/2}.$$

6. Drie plaatsen P, Q en R liggen in genoemde volgorde aan een rivier. Tegelijkertijd vertrekken een stoomboot uit P en een zeilboot uit Q naar R, waar zij beide op hetzelfde oogenblik, 4 uur na het vertrek, aankomen. De afstand van P tot Q is 10 KM.
Als de zeilboot 2 minuten meer noodig heeft om 1 KM af te leggen dan de stoomboot, hoe groot is dan de afstand van Q tot R?

---

7. Vereenvoudig $\dfrac{x^2+2x-15}{6x^4-5x^3-38x^2-5x+6}$.

8. Los x, y en z op uit:
$x+y+z=37, \qquad x^2+y^2+z^2=481, \qquad y^2=xz.$

9. Bepaal de rest der deeling van een veelterm V door $(x-1)(2x-3)(x+4)$, als men weet, dat de rest bij deeling van V door $(x-1)$ gelijk is aan 72, die bij deeling van V door $(2x-3)$ gelijk is aan 118, en die bij deeling van V door $(x+4)$ gelijk is aan -3.

---

10. Van een evenredigheid is de eerste term gelijk aan $\sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}$; de tweede term is gelijk aan $(1+3^{-1/2}):(1-3^{-1/2})$; de derde term is de waarde van p in de vierkantsvergelijking $3x^2-9x+p=0$, waarvan gegeven is, dat de som van de kwadraten der wortels $=5$ is. Welke is de 4de term?

11. Los x en y op uit: $\begin{cases} x^3-x^2y-xy^2+y^3-x-y=0, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$

12. Voor welke waarde van a heeft de vergelijking
$$x^2-(6-2a)x+a^2-3=0$$
twee gelijke wortels?

---

13. Herleid:

$$\sqrt{9-2\sqrt{4+2\sqrt{3}}}-\sqrt{6+\sqrt{13+4\sqrt{3}}}.$$

14. Gegeven zijn de twee vergelijkingen:

$$12x^2 - ax + b = 0$$
$$12x^2 - bx + 1 = 0$$

Bepaal a en b, als bekend is, dat de wortels van de tweede vergelijking worden gevonden door de wortels van de eerste vergelijking met één te verminderen.

15. Herleid:

$$\left\{\frac{a^{-2}\,b^{-1/2}}{\sqrt{ab}} \times \sqrt{\frac{a^7}{a^{-1}\,b^{-2}}} + 7a^{11/2}\right\}^{-1/3}.$$

---

16. Van de vergelijking $x^2+px+q=0$ zijn de wortels x_1 en x_2. Stel, zonder de vergelijking op te lossen, een nieuwe vergelijking samen, waarvan de wortels zijn $\frac{x_2}{x_1-1}$ en $\frac{x_1}{x_2-1}$

17. Los x op uit: $\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}=-x^2.$

18. Herleid:

$$\left\{6\,(9-6\sqrt{2})^{-1/2}-\frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}+2\sqrt{5}\right\}^{1/2}.$$

---

19. Los x op uit: $6x^5+11x^4-33x^3-33x^2+11x+6=0.$

20. Herleid: $\frac{\sqrt{\{a\,(a-b)\,\sqrt[3]{(a+b)}\}}\times\sqrt[3]{(a+b)}\,\sqrt[3]{(a-b)}}{\sqrt[3]{\{a\,(b^2-a^2)^{-4/5}\}}}.$

21. Schrijf zoo eenvoudig mogelijk: $\frac{(1-\sqrt{3})\sqrt{(2\sqrt{2}-\sqrt{6})}}{\sqrt{(4\sqrt{6}+7\sqrt{2})}}.$

---

22. Los x en y op uit: $\begin{cases} x^2+7y-2\sqrt{x^2+7y+117}=-37 \\ x-2y=7. \end{cases}$

23. Twee plaatsen P en Q zijn 210 KM van elkaar verwijderd. Om 12 min. voor 12 vertrekt een goederentrein van P naar Q en om 4 uur een sneltrein van Q naar P. Twee uur, nadat zij elkaar gepasseerd zijn, bereiken beiden hun bestemming. Hoeveel KM legt elke trein per minuut af?

24. Los x op uit: $x^4-6{,}3x^3+10{,}7125x^2-6{,}3x+1=0.$

---

25. De vergelijkingen

$$3x^2 + 20x - a = 0 \text{ en}$$
$$4x^2 + 29x + a = 0$$

hebben één gemeenschappelijken wortel. Bepaal de waarde van a.

26. Voor welke reëele waarde van x is de drieterm

$$2x^2 - 29x + 60$$

opvolgend positief, nul, negatief?
Wat is de kleinste waarde, die de drieterm kan aannemen? Licht de antwoorden door een graphische voorstelling toe.

27. Twee lichamen gaan uit A en B elkaar tegemoet. De afstand AB bedraagt 192 M. Zij vertrekken tegelijk en ontmoeten elkaar na 8 minuten; het eerste lichaam doet over 1 M $\frac{1}{9}$ minuut meer dan het tweede. Hoeveel M legt het eerste per minuut af?

---

28. Bepaal de maximum- en (of) minimumwaarde van

$$\frac{x^2 + 7x + 16}{x + 3}$$

voor reëele waarden van x; voor welke waarde(n) van x wordt dit maximum en (of) minimum bereikt?

29. Herleid: $\dfrac{p}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[6]{b}}$.

30. Los op de vergelijking:

$$2(x - 5)(x + 4) + 5\sqrt{2x^2 - x + 6} + x = -10.$$

---

31. Van de vergelijking $Ax^3 - 9x^2 - 11x + 30 = 0$ is een der wortels 5. Men vraagt de waarde van A en de beide andere wortels te bepalen. Daarna neemt men voor A de waarde 0 en vraagt de maximumwaarde, die het linkerlid van de vergelijking kan aannemen voor het geval, dat x alle waarden doorloopt van — oneindig tot + oneindig.

32. Herleid met behulp van gebroken en negatieve exponenten:

$$[2(c^2 - d^2)^{3/2} \{(c + d)^{-2/3}(c - d)^{2/5}\}^{1/4}]^3.$$

33. Een som groot 400 gulden moet gelijkelijk verdeeld worden

onder eenige personen. Vier van deze bedanken echter voor hun aandeel, waardoor de anderen ieder *f* 5 meer krijgen. Hoeveel personen waren er?

B.

§ 83. 1. Van een rekenkundige reeks is de eerste term 1, de laatste of dertiende term 37. Hoeveel termen moet men tusschen elk tweetal termen dezer reeks interpoleeren, opdat de rekenkundige reeks, die daardoor ontstaat tot som hebbe een geheel getal, dat bij deeling door 7, *twee* tot rest laat. (Het kleinste aantal, dat aan de vraag voldoet, te bepalen.)

2. Van een meetkundige reeks is gegeven de eerste term $= 2$, de laatste $= 4374$, terwijl de som $= 6560$ is. Bereken het aantal termen en de reden.

3. Iemand heeft een schuld aangegaan van *f* 10000, terug te betalen met interest berekend tegen 5 % 's jaars in 10 gelijke termijnen, aan het eind van ieder jaar te voldoen. Met welk bedrag kan hij onmiddellijk na het betalen van den 5den termijn de schuld ineens afdoen?

---

4. Van een meetkundige reeks van 7 termen is de som van de eerste 3 termen 21 en de som der laatste 3 termen 5376. Bepaal die reeks.

5. De waarden van x en y te bepalen, die voldoen aan $x^y = 100$ en $(\log x)^{\log y} = 0{,}2$.

6. Een veehandelaar kocht schapen en koeien, tezamen meer dan 100 stuks voor *f* 3000.—. Hij betaalt voor elke koe *f* 141.— en voor elk schaap *f* 13.—.
Hoeveel schapen en hoeveel koeien kocht hij?

---

7. Bereken x uit: $7^x = (\sqrt{0{,}4})^{\sqrt{0{,}4}}$

8. Het getal 100 in 3 deelen te verdeelen, zoodat de som van 17 maal het eerste, elf maal het tweede en drie maal het derde gelijk 880 zij. Hoeveel antwoorden zijn in geheele positieve getallen mogelijk?

9. De limiet van de som eener oneindig afdalende meetkundige reeks van reëele, positieve termen is 2. Vermindert men den eersten term met achtmaal den vijfden term, dan verkrijgt men tweemaal den derden term. Welke is die reeks?

---

10. Bereken het kleinste aantal termen, dat men tusschen iedere twee opeenvolgende termen der rekenkundige reeks:

$$1,\quad 8,\quad 15,\quad 22,\quad 29$$

moet interpoleeren, opdat de som der nieuwe reeks bij deeling door 18, 15 als rest geeft.

11. Los x op uit de vergelijking:

$$\frac{1}{{}^{x+6}\log x} + {}^{x}\log(x-2) = 1 + \frac{1}{{}^{2x-3}\log x}.$$

12. Drie getallen vormen een rekenkundige reeks, waarvan de som 30 is. Vermeerdert men den 3^{en} term met 5, dan vormen zij een meetkundige reeks.
Welke is die rekenkundige reeks?

---

13. Los x en y op uit: $x^{\log x + \log y} = 20$, $y^{\log x + \log y} = \frac{1}{2}$.

14. Van een rekenkundige reeks der derde orde is de 4^e term gelijk aan tweemaal de 3^e term; de 3^e term is gelijk aan de 4^e term van de tweede verschilreeks; de 1^e term is gelijk aan de som van de 1^e term van de 1^e verschilreeks en de 1^e term van de 2^e verschilreeks; terwijl de som der eerste 5 termen 70 bedraagt.
Gevraagd de algemeene term dezer reeks.

15. Als men *f* 14000 tegen 4 % op samengestelden interest uitzet, hoe lang kan men dan aan het einde van elk jaar *f* 1200 uitgekeerd krijgen? Geef tevens aan de methode om te bepalen, hoeveel men aan het einde van het daaropvolgende jaar nog ontvangt.

---

16. Drie getallen, wier som 95 is, vormen een meetkundige reeks. Vermindert men het derde getal met 5, dan vormen zij een rekenkundige reeks. Bereken die getallen.

17. Los x op uit: $\left(\frac{1}{x}\right)^{-\log x^{1/2}} + 10 = 11x^{\log \sqrt[4]{x}}$

18. Iemand gaat 1 Jan. 1917 een leening aan groot *f* 10000.— af te lossen in 8 jaarlijksche termijnen, te beginnen met 31 Dec. 1917. Op 31 December 1921 wenscht hij de resteerende schuld ineens af te lossen. Hoe groot is dit bedrag? (Rente 6 %).

---

19. Van een meetkundige reeks met oneven aantal termen is de eerste term =
$$\frac{2}{5} - \frac{7}{5^2} + \frac{2}{5^3} - \frac{7}{5^4} + \frac{2}{5^5} - \frac{7}{5^6} + \dots\dots$$
en de laatste term =
$$^{3}\log 5 \times {}^{8}\log 3 \times {}^{25}\log 64 \times 125^{{}^{5}\log 2}.$$
Hoe groot is de middelste term?

20. Bepaal x en y uit:
$$\begin{cases} \dfrac{a^{(x+3y)^2}}{a^{8(x+3y)}} = a^{-12} \\ (x-y)^{\log \sqrt[5]{(x-y)}} = \sqrt[5]{10}. \end{cases}$$

21. Bereken met behulp van logarithmen:
$$x = \frac{(-3{,}0725)^3 \sqrt[7]{(0{,}34781)^4}}{0{,}02732}.$$

---

22. Op de zijde AB van een kwadraat ABCD bevindt zich een punt P. Hoever moet dit punt van A verwijderd zijn, opdat de som van de kwadraten der afstanden van P tot C en D zoo klein mogelijk zij en hoe groot is deze som dan? (De zijde van het kwadraat $= a$).

23. Bepaal de waarden van a, b en c, als de vorm $x^3 + ax^2 + bx + c$ bij deeling door $x - 1$, $x - 2$ en $x - 3$ opvolgend 1, 3 en 15 tot rest laat.

24. x en y oplossen uit:
$$x + y - \sqrt{(x+y)} = 6 \quad \text{en} \quad x^3 + y^3 = 351.$$

---

25. x en y oplossen uit:
$$3^{x+1} - 2^{y-1} = 23 \quad \text{en} \quad 3^{2x-1} + 2^{y+1} = 43.$$

26. Bereken de waarde van x uit:
$\log x + \log^2 x + \log^3 x + \dots\dots$ ad inf. $= \log 100x$, als $x < 10$ is.

27. Verdeel het getal 180 in een 23-voud, een 29-voud en een 53-voud.

---

28. Tusschen de positieve getallen a en b bestaat de volgende betrekking:
$^{b+2}\log a - 3 \times {}^{b+2}\log a \times {}^{b+3}\log a + {}^{b+3}\log a = 0.$
Als a niet gelijk is aan 1, bewijs dan: $a^3 = b^2 + 5b + 6$.
29. Los x op uit: $0{,}8145^x = \lim_{n=\infty}(1 + \log 3 + \log^2 3 + \ldots . \log^n 3)$:
30. Twee rekenkundige reeksen zijn bepaald door de volgende gegevens:
$a_1 = 15,\ l_1 = 29$ en $n_1 = 12;\ a_2 = 7,\ l_2 = 26$ en $n_2 = 10.$
Tusschen elke twee termen worden in de eerste reeks x, in de tweede reeks y termen geïnterpoleerd, zoodat er weer rekenkundige reeksen gevormd worden. Bepaal de kleinste x en y, waarvoor de beide nieuwe reeksen dezelfde som hebben.

---

31. Los x en y op uit: $x^{2-\log y} = y^{3-\frac{1}{2}\log x} = 100.$
32. Van een oneindig voortloopende meetkundige reeks is de limiet van de som der kwadraten der termen $6 \times$ de limiet van de som der termen. De limiet van de som eener meetkundige reeks, die denzelfden eersten term heeft en de helft van de reden, is $\frac{3}{8}$ maal het kwadraat van den eersten term. Bepaal die reeks.
33. Het 11-voud van een term der rek. reeks: 3, 8, 13 enz. is gelijk aan het 13-voud van een term der rek. reeks: 2, 6, 10 enz. Welke termen kunnen bedoeld zijn?

---

34. Hoeveel bedraagt de som van alle positieve getallen tusschen 100 en 1000, die veelvouden zijn van 9 en bij deeling door 7 tot rest geven 3?
35. Een schuld van f 10000 vervalt den 1sten Januari 1932. Men wil die schuld aflossen in 5 gelijke jaarlijksche termijnen van $f\,x$, te betalen 1 Januari 1922, 1 Januari 1923 en zoo vervolgens. Hoe groot is x? (Rentevoet 5 %).
36. Los x op uit de vergelijking: $3^{2^x} - 3^{2^{x-1}} = 90.$

---

37. Los x op uit: $x^{\log^2 x - 3\log x + 2} = 1$.

38. Van een meetkundige reeks is het aantal termen gelijk 12, de vijfde term gelijk $10^2/_3$ en de som van de logarithmen der 12 termen gelijk 96 log 2 — 30 log 3. Bepaal de reeks.

39. Bepaal de waarde van x in:

$$x = \frac{(-0{,}23591)^6 \sqrt[3]{(-7{,}9326)}}{\sqrt[5]{(-0{,}059236)}} + \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

---

40. Een maatschappij moet aan het begin van elke 10 jaar een uitkeering doen van f 1500.—. Met welk bedrag kan die verplichting worden afgekocht aan het einde van het vijfde jaar? Rentevoet 4 %.

41. Van een reeks is de algemeene term $T_n = (2n - 1)x^{n-1}$. Bepaal de som van de eerste 10 termen.

42. Van een rekenkundige reeks zijn de uiterste termen 3 en 41; van een andere rekenkundige reeks, waarvan de som 100 minder bedraagt, zijn de uiterste termen 16 en 52. Welke kunnen die reeksen zijn, als het aantal termen van de twee reeksen samen kleiner is dan 60?

---

43. Van een rekenkundige reeks der derde orde is $t_2 = 6$; $t_3 = 14$; $t_5 = 64$; $t_6 = 114$. Bepaal den algemeenen term.

44. Welke waarden van x voldoen aan de vergelijking:

$$2x - 8 \log 2 = x(x-2) \log 5 + (x-4)(x+2) \log 2 ?$$

45. Bepaal tusschen 300 en 400 drie op elkaar volgende getallen, waarvan het kleinste door 10, het volgende door 9 en het derde door 4 deelbaar is.

---

46. Iemand heeft zich een lijfrente van *f* 1500.— gekocht, te beginnen over 25 jaar jaarlijks gedurende 10 jaar te betalen. Hij wil deze lijfrente vervangen door een andere gedurende 15 jaar te betalen en te beginnen over 20 jaar. Gevraagd wordt deze lijfrente te berekenen. Rente 5 %.

47. Van een meetkundige reeks van 20 termen is de som 44,04. Deelt men het product der laatste 10 termen door het product der eerste 10 termen van deze reeks, dan verkrijgt men 2,7048 tot quotiënt. Men vraagt den eersten term en de reden der reeks te bepalen.

48. Indien a, b en p positieve getallen beteekenen, vraagt men te bewijzen: $\frac{1}{{}^{a}\log p} + \frac{1}{{}^{b}\log p} = \frac{2}{{}^{\sqrt{ab}}\log p}$.

49. *a.* Stel grafisch voor: $y = x^2 - 2x - 8$. *b.* Bepaal de as van symmetrie van de kromme. *c.* Lees uit de figuur de minimumwaarde van y af. *d.* Bepaal uit de figuur de opv. waarden van x, die $y = 0$ en 3 maken. *e.* Bereken de wortels van $x^2 - 2x - 8 = 0$. *f.* Bereken de minimumwaarde van $y = x^2 - 2x - 8$. *g.* Bepaal grafisch en door berekening de waarden van x en y, die voldoen aan de vergelijkingen:

$$y = x^2 - 2x - 8 \quad \text{en} \quad x + 3y = 3$$

(zelfde figuur gebruiken als voor de eerste vragen).

---

50. Van een meetkundige reeks van drie termen is de som 26. Vermeerdert men het middelste getal met 4, dan ontstaat er een rekenkundige reeks. Bepaal die meetkundige reeks.

51. Los x op uit: $\log\log x = \log(3 - \log x) + 1$, wanneer het grondtal van het logarithmenstelsel 2 is.

52. Indien $S_n = 1 + 2 + 3 \ldots . + n$ is, toon dan aan:

$$1^0.\quad S_n + S_{n-1} = n^2; \qquad 2^0.\quad S^2_n - S^2_{n-1} = n^3;$$
$$3^0.\quad S^2_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots . + n^3.$$

---

53. In een driehoek ABC, waarvan de basis AB = 30 cM en de hoogte CD = 25 cM is, laten zich rechthoeken beschrijven, waarvan een zijde PQ op de basis valt en SR evenwijdig met de basis is. De oppervlakte van zoo'n rechthoek is een functie van de hoogte SP. Bepaal die functie, teeken de grafiek er van en bespreek ze.
Voor welke hoogte is de oppervlakte zoo groot mogelijk?

54. Welke waarde moet men aan t geven, opdat de twee vergelijkingen $\frac{1}{2}(1+t)x+2y=3-t$; $2x+(3+t)y=4$ afhankelijk van elkaar zijn en welke waarde, opdat ze strijdig zijn?

---

55. Iemand moet op 1 Januari 1932 een som van f 5000 betalen. Hij wenscht te beginnen met 1 Januari 1922 elk jaar een vaste som te betalen en zoodoende door 11 betalingen zijn schuld te delgen. Hoe groot is die vaste som?
Nadat hij 7 keer betaald heeft, wenscht hij bij de achtste betaling zijn schuld geheel af te doen. Hoe groot moet die achtste betaling zijn? Rente 6%.

56. Schrijf $\frac{1723}{4141}$ als de som van twee breuken, waarvan de noemers de factoren zijn van 4141.

57. In een cirkel beschrijft men een willekeurigen driehoek. Men verbindt de middens der zijden van dezen driehoek; in den ontstanen driehoek doet men hetzelfde enz.
Gevraagd wordt de limiet te bepalen van de som van de oppervlakken der omgeschreven cirkels van al die driehoeken, wanneer men deze handelwijze onbepaald voortzet.

---

58. Bereken x uit: $3^{2x^2}=45\times 5^{-x}$.

59. Bepaal de som van de reeks:

$$1+2\log\frac{a}{a+1}+3\log^2\frac{a}{a+1}+4\log^3\frac{a}{a+1}\ldots \text{ ad inf.,}$$

als $a>0$ is.

60. Iemand moet van 1921 tot en met 1926 jaarlijks op 1 Januari f 1000 betalen. Met welk bedrag kan hij die schuld in eens aflossen medio 1923? Rente 5%.

---

61. Los x op uit: ${}^x\log 25+{}^x\log(x^2-6)=2+{}^x\log 6$.

62. Een oneindige reeks 1, a, b, c, d, is zoo gevormd, dat iedere term de helft is van de som van al zijn volgende termen. Wat is de aard van deze reeks? Bepaal de reden en de som.

63. Van 3 op elkaar volgende getallen is het eerste een 2-voud, het tweede een 9-voud, het derde een 14-voud. Bereken de som van alle stellen van deze getallen, die tusschen 0 en 1000 liggen.

---

64. Een gemeente leent 1 Jan. 1920 *f* 300.000. Zij betaalt *f* 10.000 per jaar terug, te beginnen op 1 Jan. 1921, gedurende 20 jaar en wil dan haar schuld aflossen in 10 gelijke jaarlijksche stortingen te beginnen 1 Jan. 1941. Rente 5%. Hoeveel bedraagt één storting?

65. Op drie na het kleinste paar opvolgende getallen te bepalen, waarvan het kleinste bij deeling door 17 tot rest 6, en het andere bij deeling door 7 tot rest 5 overlaat.

66. ${}^{(7x-1)}\log 9^3 + 3 = {}^{10}\log (63x - 9^{\,{}^{9}\log 9})$. Bepaal x.

---

67. Van een meetkundige reeks is de beginterm 5 en de eindterm 2560. De som van alle termen is 5115. Wat is de reden, en hoe groot is het aantal termen der reeks?

68. Van een rekenkundige reeks, waarvan de eerste term 68 en het verschil 9 is, is de n^e term gelijk aan den m^{en} term van een andere rekenkundige reeks, waarvan de eerste term 586 en het verschil $-$ 23 is. Bepaal n en m.

69. Een maatschappij, die verplicht is tot een eeuwigdurende jaarlijksche uitkeering van *f* 1200.—, en wel de eerste uitkeering onmiddellijk, kan die verplichting afkoopen door terstond f 10.000.— te betalen, en de rest in 3 termijnen, die vervallen over 10, 15 en 20 jaar en die opv. bedragen *f* x, *f* $2x$ en *f* x. Hoe groot is x? Rentevoet 4%.

---

70. Los x en y op uit de volgende vergelijkingen:

$$3^{2x-y+2} + 3^{y-2x-1} = 4 \text{ en} \left(\frac{6x}{2x+y}\right)^{{}^{25}\log 5} + \left(\frac{6x}{2x+y}\right)^{-{}^{25}\log 5} = {}^{25}\log 625.$$

71. De som van de termen der reeks 5, 9, 13 ... is 20300. Hoe groot is de som der termen van deze reeks, welke gedeeld door 7, 4 tot rest geven?

72. Van een onbepaald voortloopende meetkundige reeks, wier reden is $\frac{1}{9}$, is de limiet van de som der termen $\frac{3}{8}$. Wanneer tusschen elke 2 termen dezer reeks 3 positieve termen worden geïnterpoleerd, bereken dan de limiet van de som der termen dezer nieuwe reeks.

---

73. Los op: $x^{1+5\log x} = 7$.

74. Van een rekenkundige reeks van 5 termen is de som der termen 33 en de som der derdemachten van de drie termen 4587. Welke is die reeks?

75. Een scheikundeleeraar heeft 1 Januari 1917 *f* 100 weten over te houden van 't bedrag dat hij kon besteden aan zijn instrumentarium. Van een ouder van een leerling heeft hij op 1 Januari 1918 *f* 100 gekregen; evenzoo *f* 100 op 1 Januari 1919. Op 1 Januari 1920 krijgt hij toezegging gedurende 6 jaar elk jaar *f* 100 te zullen ontvangen (eerste storting op dien datum.) De rector der school stelt hem de contante waarde dezer 6 uitkeeringen ter hand, krijgt daarvoor echter zelf deze 6 uitkeeringen. Het curatorium der school geeft hem bovendien op laatstgenoemden datum de somma van *f* 136,08, waardoor hij in staat is, zich 4 microscopen voor zijn practicum aan te schaffen. Wat is de prijs dezer microscopen per stuk?
Rentevoet 5%, $\log 1{,}05 = 0{,}0211893$.

EINDEXAMEN H. B. S.

1. Los x en y op uit:
$$x^3 + y^3 = 9 \text{ en } x^2 + xy + y^2 = \tfrac{7}{3}(x^2 - xy + y^2).$$

2. Van de vergelijking:
$$x^2 - Ax = -1\tfrac{3}{4} - \tfrac{3}{4}\sqrt{3}$$
is de verhouding der wortels $-\dfrac{3 + 2\sqrt{3}}{3 - 5\sqrt{3}}$.

Men vraagt de waarde van A.

3. Los x op uit:
$$7^{-1/2} \times \left(\frac{11 - 6\sqrt{2}}{11 + 6\sqrt{2}}\right)^{-1/4} + \frac{x}{3 - \sqrt{2}} = \frac{2(3 + \sqrt{2})}{7x}.$$

4. Van een rekenk. reeks is de 5^e term 3 meer dan het vierde gedeelte van den 14^{en} term; de 9^e term is een volledig vierkant. Vermeerdert men den 20sten term met 2 en deelt men deze som door den positieven vierkantswortel uit den 9^{en} term, dan verkrijgt men 7 meer dan die wortel. Welke is die reeks?

5. Los x op uit:

$$(\log x)^2 + 5^{\log 30 - \log 3} = \log x^6 + 25^{\log \sqrt{5}},$$

indien 5 het grondtal is van het logarithmenstelsel.

6. Schrijf een vierkantsvergelijking op, waarvan de eene wortel is:

$$\sqrt{\{7 + \sqrt{(21 - 12\sqrt{3})}\}} : \sqrt[4]{(28 - 16\sqrt{3})}$$

en de andere het omgekeerde van dezen vorm.

7. Aan het bezit van een landgoed is de verplichting verbonden elke 15 jaar een som van 1200 gulden uit te keeren voor een stichting. Met welk bedrag kan die verplichting afgekocht worden, 5 jaar voordat een nieuwe uitkeering moet plaats hebben, als er 4 % samengestelde interest gerekend wordt?

8. Welke waarde moet a hebben, opdat de vergelijking

$$(18 + 8\sqrt{5})x^2 - (a + 2\sqrt{5})x + 3 - \sqrt{5} = 0$$

twee gelijke wortels heeft? Substitueer de voor a gevonden waarden en ontbind dan de vergelijking in factoren.

9. Men heeft een getal van twee cijfers en een uit dezelfde cijfers bestaande, maar in omgekeerde volgorde. Deelt men het grootste door 9 en het kleinste door 7, dan verkrijgt men hetzelfde quotient en telkens 5 tot rest. Welke getallen zijn bedoeld?

10. Los x en y op uit:

$$\left(\frac{6x}{2x+y}\right)^{\log 5} + \left(\frac{6x}{2x+y}\right)^{-\log 5} = \log 625$$

en $\log\log(x^2 + xy + y^2) = \log 25^{2\log 2} + \log(\log 4 - \log 2)$.

Het grondtal van het logarithmenstelsel is 25.

11. Bereken x en y uit:

$3^{2x-y+2} + 3^{y-2x-1} = 4$ en $(3x - y)(x + y - 7) = 4x + 4y - 28$.

12. Van een meetkundige en een rekenkundige reeks, ieder van 6 termen, zijn de eerste termen gelijk. De tweede termen zijn ook gelijk. De derde term van de meetkundige reeks is gelijk aan den vijfden term van de rekenkundige. De laatste term der meetkundige reeks is 464 grooter dan de laatste term der rekenkundige.

Bereken de som der termen van elk der reeksen.

13. Op een gemeente rust de voortdurende verplichting jaarlijks, te beginnen met 1 Januari 1906, acht duizend gulden te betalen. De gemeente wil die schuld afdoen, door op 1 Januari 1906, 1 Januari 1907 enz. twintig duizend gulden te betalen. Wanneer zal de schuld gedelgd zijn en hoeveel bedraagt de laatste aflossing? Rentevoet 4%.

14. Bereken met behulp van logarithmen:

$$x = (-2{,}1475)^5 \sqrt[7]{(-0{,}87614)^4} + \sqrt[3]{\left(1{,}8792^3 - \frac{\sqrt{0{,}25107}}{0{,}10763}\right)^{11}}.$$

15. Welke is in hare eenvoudigste gedaante de vierkantsvergelijking, die tot wortels heeft:

$$\frac{3\{\sqrt{(5+2\sqrt{5})} + \sqrt{(5-2\sqrt{5})}\}}{\sqrt{\{6+4\sqrt{5} - \sqrt{(36-16\sqrt{5})}\}}} \text{ en } \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt[4]{(97-56\sqrt{3})}}?$$

16. Los x op uit de vergelijking:

$$x^{\log x} = x + \frac{x}{\pi} + \frac{x}{\pi^2} + \frac{x}{\pi^3} + \text{enz.},$$

waarin het tweede lid een oneindig voorloopende meetkundige reeks en $\pi = 3{,}14159\ \ldots\ldots$ is.

17. Aan een rechten weg zijn twee plaatsen gelegen, A en B. Uit A vertrekt *in de richting* AB een wielrijder, die het eerste uur 12 KM, doch elk volgend uur $^2/_3$ KM minder aflegt.

Uit B vertrekt 3 uur later een tweede wielrijder in *dezelfde* richting, die het eerste uur 9 KM en elk volgend uur $^1/_6$ KM minder aflegt.

De afstand AB = 35 KM.

Wanneer zal een van beide wielrijders den anderen inhalen?

18. Iemand moest op 1 Jan. 1907, 1 Jan. 1912 en 1 Jan. 1916 telkens *f* 5000 betalen. In plaats daarvan betaalde hij op 1 Jan. 1907 en zal hij elk volgend jaar op 1 Jan., tot en met 1 Jan. 1916, een zelfde bedrag betalen. Hoe groot is dat bedrag?

Als hij dit bedrag echter zes op elkaar volgende jaren op 1 Jan. betaald heeft, houdt hij op met betalen om zijn dan nog overgebleven schuld op 1 Jan. 1916 in eens af te doen. Hoeveel moet hij dan betalen? De rentevoet is 4 percent.

19. Van de vierkantsvergelijking: $3x^2 - 10x + p = 0$ is het verschil van de tweede machten der wortels: $\frac{1}{9}(60\sqrt{5} - 40)$. Bepaal p.

20. Van een meetkundige reeks is het aantal termen gelijk 12, de vijfde term gelijk $10\frac{2}{3}$ en de som van de logarithmen der twaalf termen gelijk: 96 log 2 — 30 log 3. Bepaal die reeks.

21. Men vraagt de waarde van $\sqrt[a]{a}$ te betalen, als gegeven is:

$$a = 0{,}02775 + \sqrt[5]{0{,}0436}.$$

22. Los x en y op uit de beide volgende vergelijkingen:

$$2^{4x+2y-5} - 2^{2x+y-1} - 16 = 0$$

en

$$\log \log (3x - 2) = \log 2 + \log \{\log (3x + 2y) - \log 4\}.$$

23. Drie getallen, die een opklimmende meetkundige reeks vormen, hebben tot som $20 + 5\sqrt{3}$. Vermeerdert men elk der eerste twee termen met $20 - 10\sqrt{3}$, dan vormen die twee sommen met den derden term der oorpronkelijke reeks, drie termen eener rekenkundige reeks. Welke zijn die getallen?

24. Iemand wil telkens op 1 Jan., beginnende 1 Jan. 1910 en eindigende 1 Jan. 1920, bij een bank een bedrag storten en wel zóó, dat elke na het eerste jaar te storten som de helft is van de voorgaande. Hij verlangt, dat de bank hem daarvoor, te beginnen 1 Jan. 1940, telken jare op 1 Jan., *f* 1500 zal uitkeeren tot aan zijn overlijden. Als de bank aanneemt, dat die persoon 1 Jan. 1960 zijn laatste uitkeering zal trekken, op hoeveel moet zij dan het eerste te storten bedrag stellen? Rente 4 %.

25. De plaatsen A en B zijn 8000 meter van elkaar verwijderd. Op hetzelfde oogenblik vertrekken een voetganger, een rijtuig en een wielrijder uit A naar B. Op 5500 meter afstand van A ontmoet de voetganger den wielrijder, die, na in B 13 minuten gerust te hebben, naar A is teruggekeerd. Als de voetganger 500 meter verder van A verwijderd is, ontmoet hij het rijtuig, dat, na een oponthoud van 10 minuten in B, eveneens naar A teruggekeerd

is. Het rijtuig komt 13 minuten later dan de wielrijder in A aan. Hoeveel meter leggen voetganger, rijtuig en wielrijder per minuut af?

26. Men vraagt den vorm van den 2[den] graad:

$$2x^2 + xy\sqrt{3} - 4xz\sqrt{2} - 3y^2 + 5yz\sqrt{6} - 12z^2$$

in twee factoren van den 1[sten] graad te ontbinden.

27. Op den eigenaar en op alle volgende eigenaren van een perceel land rust de verplichting, telken jare, op den 1[sten] Januari, te beginnen 1 Januari 1911, *f* 100 te betalen aan een stichting. In plaats hiervan komt hij met de stichting overeen, om op 1 Januari 1912, 1 Januari 1916, en zoo telkens om de vier jaar, in het geheel tienmaal, eenzelfde som te betalen. Hoe groot is deze som als de rente 4 percent bedraagt?

28. Van een getal, dat uit 3 cijfers bestaat, is de som der cijfers 20. Indien men dit getal met 16 vermindert en de uitkomst door 2 deelt, verkrijgt men weer een getal van 3 cijfers. Deze cijfers zijn dezelfde als van het oorspronkelijk getal, maar de opeenvolging is juist andersom als in het eerste getal. Welk getal is het?

29. Bepaal de waarden van x, die voldoen aan de vergelijking:

$$x^{\log (x)^2} + x^{\log x} - 84 = \log 60 - \log 24 + \log 4 - \frac{5 \log 5}{\log 0{,}01} \times \frac{\log^{\log 4}}{\log 25}.$$

30. Van de vergelijking:

$$x^3 - (a - \sqrt{2})x^2 + (5a - 13)x - (a + 5 - 6\sqrt{2}) = 0$$

is één der wortels: $2 - \sqrt{2}$.

Bepaal de waarde van a en de overige wortels.

31. Van de vierkantsvergelijkingen:

$$18x^2 - \text{A}x + 24\sqrt{5} - 48 = 0$$

en

$$12x^2 - (26 - 14\sqrt{5})x + \text{B} = 0$$

is één wortel van de eerste gelijk aan één wortel van de tweede; de tweede wortel van de eerste is ook gelijk aan den tweeden wortel van de tweede, maar heeft het tegengestelde teeken. Bepaal met behulp van de eigenschappen der wortels: *a*) de waarde van A en *b*) de wortels van beide vergelijkingen.

32. Een rekenkundige en een meetkundige reeks hebben evenveel termen en wel een oneven aantal. Beide reeksen zijn opklimmend en hebben 16 tot middelsten term. De eerste term van de meetk. reeks is het dubbel van den eersten term van de rek. reeks. De laatste term van de meetk. reeks is 97 meer dan de laatste term van de rek. reeks. De som der termen van de meetkundige reeks is 254. Bepaal die reeksen.

33. Een vader sluit op 1 Januari 1912 een verzekering, ten einde zijn zoon, die op dien datum is geboren, van den dag, waarop hij 18 jaar wordt tot en met den dag, waaarop hij 23 jaar wordt, op elken jaardag te doen uitkeeren een bedrag van *f* 1200. De eerste premiestorting heeft plaats op 1 Jan. 1912, de tweede op 1 Jan. 1913 enz.; de laatste op 1 Jan. 1929. Hoe groot is de jaarlijksche premie als de rente tegen 4 % gerekend wordt? — Als de vader op den 1^en^ Jan. 1922 komt te overlijden en dan nog juist de dan te betalen premie betaald is, vraagt men naar het verlies, dat de verzekeringsmaatschappij zal geleden hebben bij de laatste uitkeering aan den zoon.

N.B. Na het overlijden van den vader wordt geen premie meer gestort.

34. Van de vergelijking: $x^2 - Ax - A = 0$ is één der wortels: $\sqrt[4]{28 + 16\sqrt{3}}$. Bepaal A en stel de wederkeerige vergelijking van den vierden graad samen, waarvan twee wortels gelijk zijn aan die van de gegeven vergelijking.

35. Drie punten A, B en C bewegen zich eenparig langs een cirkelomtrek. A doorloopt dien in 20, B in 8 en C in 6 seconden. A en C bewegen zich in denzelfden zin, B in den tegengestelden zin met A en C. Op zeker oogenblik bevinden A en B zich in hetzelfde punt van den cirkelomtrek, terwijl C op dat oogenblik een boog van 120° ten achter is bij A. Na welk *geheel* en ook na welk *gebroken* aantal seconden zullen A, B en C zich *voor het eerst* in hetzelfde punt van den cirkelomtrek bevinden?

36. Los x en y op uit:

$$2 \times 3^{6-2x+3y} - 3^{2x-y-5} = 5,$$

en

$$\frac{(x+y)^{2 \log 3(x+y)}}{(x+y)^{\log 5(x+y)}} = 6 \log 3 + 3^{\log 4},$$

wanneer 9 als grondtal van het logarithmenstelsel wordt aangenomen.

37. Van een evenredigheid is de eerste term $4a$, waarin a de limiet is van de oneindig voorloopende reeks:

$$\frac{7}{5} + \frac{17}{200} + \frac{7}{500} + \frac{17}{20\,000} + \frac{7}{50\,000} + \frac{17}{2\,000\,000} + \ldots$$

De tweede term is gelijk aan $125^{{}^5\log 2} + 3^{{}^9\log 16}$ [1]).

De derde term is de positieve wortel van de vergelijking: $16x^2 - 56x + p = 0$, waarvan gegeven is, dat het verschil van de vierkanten der wortels $= 14$ is.

Welke is de vierde term?

38. Een rijtuig vertrok 's morgens om 7 uur met een gemiddelde snelheid, kleiner dan 20 KM per uur, uit A naar een 90 KM verder gelegen plaats B. Om half negen vertrok een wielrijder uit A, die tegelijk met het rijtuig te B aankwam. Uit B was om 9 uur een auto vertrokken naar A, die om 10 uur het rijtuig voorbijreed en 2 uur vroeger te A aankwam dan de wielrijder te B.

Gevraagd: de gemiddelde snelheden, waarmede 't rijtuig, de wielrijder en de auto hebben moeten rijden.

39. Op 1 Jan. 1914 komt op iemand en zijn toekomstige erfgenamen de verplichting te rusten een gebouw te onderhouden. Daarvoor moet op het eind van ieder van 5 achtereenvolgende jaren *f* 250 betaald worden; de volgende 4 jaren wordt niets betaald; op het eind van ieder der volgende 5 weer telkens *f* 250, dan weer 4 jaren niets enz. De eerste *f* 250 moet gestort worden op 1 Jan. 1917.

Hij wil deze verplichting afkoopen, maar moet daarvoor geld leenen. Indien hij deze schuld moet afdoen in 5 gelijke termijnen

---

[1]) Onder ${}^5\log 2$ verstaat men de log van 2, als 5 het grondtal is.

aan het begin van ieder jaar te betalen, en de eerste termijn vervalt op 1 Jan. 1915, hoe groot is dan elke termijn?

Rente 4 %.

40. Wanneer men de beide wortels der vierkantsvergelijking

$$x^2 + px + q = o$$

vermindert met

$$\left\{\sqrt{4 - \sqrt{5 + 6\sqrt{2}}} - \sqrt{4 + \sqrt{5 + 6\sqrt{2}}}\right\}$$

verkrijgt men de wortels der vierkantsvergelijking

$$x^2 + qx + p = o.$$

Men vraagt de waarden van p en q.

41. Bepaal uit de rekenkundige reeksen:

1, 9, 17, 25, ... enz.
2, 7, 12, 17, ... enz.
3, 14, 25, 36, ... enz.

drie termen, een uit de eerste, een uit de tweede en een uit de derde reeks, zoodanig, dat zij in deze volgorde ook een rekenkundige reeks vormen, terwijl de som van driemaal den eersten, viermaal den tweeden en vijfmaal den derden term 7500 bedraagt.

42. Los x op uit:

$$x^{\log x} - \frac{6x^{\log \sqrt{x}}}{x\sqrt{x}} = -\frac{5}{x^3}.$$

43. Van de vierkantsvergelijking

$$A(\sqrt{3} - \sqrt{2})\,x^2 + \frac{B}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}\,x + C = 0$$

is gegeven:

$A = \sqrt[4]{49 + 20\sqrt{6}}$,

$B =$ de som der oneindig voortloopende meetkundige reeks

$$8\sqrt{3} + (8\sqrt{6}) \times 3^{-1/2} + 16 \times 3^{-1/2} + \ldots \text{ enz.}$$

Het verschil der wortels is

$$(6\sqrt{6})^{\log 10 - 2\log\sqrt{5} + \log\sqrt{\log 18 + \log 72}},$$

waarbij als grondtal van het logarithmenstelsel 6 is aan te nemen.

Gevraagd de waarde van C te berekenen.

44. Uit het eindpunt P van een weg, lang 68 KM, vertrekt een wielrijder A en 2 uur later gaat uit het eindpunt Q een

andere wielrijder B hem tegemoet. Onmiddellijk nadat ze elkaar zijn voorbijgegaan, wijzigen beide wielrijders hunne snelheid. A vermindert zijn snelheid met 4 KM per uur en komt $2^1/_2$ uur na de ontmoeting te Q aan. B heeft zijn snelheid met 2 KM per uur vermeerderd, en blijkt bij aankomst te P $^1/_2$ uur korter over den geheelen weg te hebben gedaan dan A.

Hoever van P had de ontmoeting plaats?

45. Iemand betaalt aan het begin van 8 achtereenvolgende jaren telkens eenzelfde som, om later 6 uitkeeringen elk groot *f* 1500 te ontvangen. De eerste uitkeering zal geschieden 10 jaar na de laatste storting, en elke uitkeering 3 jaar na de voorgaande.

Hoeveel moet hij jaarlijks storten, als de interest tegen 4 $^0/_0$ berekend wordt?

46. *a.* Bereken x uit:

$$\log \log x = \log \{3 - \tfrac{1}{2}\log x\} + 2,$$

als 2 het grondtal van het logarithmenstelsel is.

b. Bij welk grondtal is de logarithme van 1,25588 gelijk aan — 0,09983?

47. Een gemeente ging op 1 Jan. 1918 een leening aan groot 15000 gulden. De schuld zal worden afgedaan in jaarlijksche termijnen, ieder groot *f* 750, te beginnen op 1 Jan. 1919. Op den datum, waarop voor het laatst de volle termijn moet worden uitbetaald, zal tevens de rest der schuld gedelgd worden. Gevraagd worden die datum en het bedrag der rest tot guldens afgerond. Rente 4 $^0/_0$. ($\log 1{,}04 = 0{,}0170333$).

48. Van een meetkundige reeks is de som van de termen 1533. Bepaalt men van elke twee opeenvolgende termen het verschil, dan vormen die verschillen een reeks, waarvan de som 765 is. Zet men de oorspronkelijke reeks onafgebroken voort, dan krijgt men een oneindige reeks, waarvan de som 1536 is. Bepaal de eerste reeks.

49. Iemand gaat op 1 Jan. 1920 een schuld aan van *f* 30.000 en zal deze schuld afdoen door jaarlijks een gelijk bedrag te betalen, te beginnen 1 Jan. 1921 en voor den laatsten keer 1 Jan. 1930. Hoe groot is dit bedrag, als de interest tegen 6 $^0/_0$ berekend

wordt? Iedere jaarlijksche betaling (annuïteit) bestaat voor een gedeelte uit interest en voor een ander deel uit aflossing (amortisatie). Hoeveel aflossing bevat de zesde annuïteit?

50. Bereken x uit de vergelijking:

$$\frac{(x-1)^2}{(x-1)^{-\log(x-1)}} = 3 \times 6^{3\log 2 + 2\log 3},$$

als 6 het grondtal van het logarithmenstelsel is.

51. Op een bezitting rust de verplichting op 1 Mei van elk jaar aan de gemeente een vaste som van f 375.— te betalen. Met welk bedrag kan deze verplichting worden afgekocht op 1 Jan. van een ander jaar, als de rente berekend wordt naar $5\frac{1}{2}$ %?

52. Iemand laat op 1 Januari 1923 een kapitaal na, groot f 32000 met de bepaling, dat van de rente elk jaar, voor het eerst op 1 Januari 1924, een studiebeurs zal worden gegeven, terwijl de rest van de rente bij het kapitaal wordt gevoegd tot dit zoo groot zal zijn geworden, dat jaarlijks op 1 Januari twee beurzen, elk van f 1200 uit de rente kunnen worden betaald. Na hoeveel jaar zal dit het geval zijn, als de rentevoet 6 % is?

53. Een van de beide waarden van x, die voldoen aan de vergelijking $2\log^2 x + 6^{\log a - \log 5} = \log x^7 + 36^{4\log \sqrt{6} - \log 9}$ is 36. Als het grondtal van het logarithmenstelsel 6 is, wat is dan de waarde van a en wat is de tweede waarde van x, die aan de vergelijking voldoet?

54. Als de som van de eerste n termen van een willekeurige rekenkundige reeks voorgesteld wordt door S_n, die van de eerste $(n+1)$ termen door S_{n+1} enz., dan is

$$S_{n+4} - 4\,S_{n+3} + 6\,S_{n+2} - 4\,S_{n+1} + S_n = 0.$$

Bewijs dit.

Als voor elke waarde van n een bepaalde rekenkundige reeks $S_n = n^2 + n$ is, hoe groot is dan de n^{de} term?

55. A leent op 1 Januari 1900 aan B f 5000 tegen 6 % 's jaars samengestelde interest.

B leent op dienzelfden datum deze f 5000 weer aan C tegen 1 % per 2 maanden samengestelde intrest. C betaalt aan het einde van elk jaar (dus voor het eerst op 1 Januari 1901) aan

B het bedrag s, waarmee deze schuld van f5000 over het afgeloopen jaar is toegenomen.

Telken jare geeft B dit bedrag s onmiddellijk aan A ten einde de door hem op dien datum verschuldigde rente te voldoen en bovendien een gedeelte van zijn schuld af te lossen.

Hoe groot is het bedrag s? Op den 1[sten] Januari van welk jaar is het geheele bedrag s niet meer noodig om de schuld van B aan A geheel te delgen en hoeveel houdt B er dan van over?

$$\log 1{,}01 = 0{,}0043214, \quad \log 1{,}06 = 0{,}0253059.$$

56. Bereken x als gegeven is $x^2 = pq$,

$$p = \sqrt[123]{-0{,}765^{79}} \text{ en } q = {}^7\log 0{,}625.$$

57. *a.* Bewijs, dat de logarithmen van de termen eener meetkundige reeks de termen zijn van een rekenkundige reeks.

b. Indien de som van de logarithmen van het tweede n-tal termen eener meetkundige reeks het drievoud is van de som der logarithmen van het eerste n-tal, dan is de reden dier meetkundige reeks gelijk aan het vierkant van den eersten term. Bewijs dit.

c. Bereken van de onder b bedoelde reeks de verhouding van de som der logarithmen van het derde n-tal tot de som der logarithmen van het eerste n-tal.

GEMENGDE VRAAGSTUKKEN.

§ 85. 1. Los x en y op uit $\begin{cases} x^2 + y^2 + x - y = 18. \\ x^2 - 3y^2 + x + 3y + 30 = 0. \end{cases}$

2. Men vraagt den vierkantswortel uit:

$$a) \quad \frac{9y^2}{x} - \sqrt{\frac{y^3}{x^{-1}}} + \frac{x}{4} - 3y + y^3 + 6\sqrt{x^{-1}y^5};$$

$$b) \quad \left(x + \frac{1}{x-1}\right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3 - x^2 + x}\right);$$

$$c) \quad 24 + \frac{x^2}{y} + 8\left(\frac{2y}{x^2} - x \,.\, y^{-1/2}\right) - \frac{32\sqrt{y}}{x}.$$

3. Bepaal de som van 7 termen van de reeks:

$$\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}, \ \sqrt{3}, \ \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}, \ \ldots$$

4. Deel het product van

$$\frac{y^2(xy^{-1}-1)^2}{x(1+x^{-1}y)^2} \text{ en } \frac{y^2(x^{-2}+y^{-2})}{x(xy^{-1}-x^{-1}y)} \text{ door } \frac{1-x^{-1}y}{xy^{-1}+1}.$$

5. Wat is de coëfficiënt:

a) van x^9 in de ontwikkeling van $(5a^3-4x^3)^7$?

b) van x^{14} en van x^{-10} in de ontwikkeling van $\left(x^4+\frac{1}{x^2}\right)^8$?

c) van x en van x^{-2} in de ontwikkeling van $\left(2x^2+\frac{1}{x}\right)^8$?

6. Als x_1 en x_2 de wortels zijn van de vergelijking $ax^2+bx+c=0$, zoek dan de waarde van $(ax_1+b)^{-2}+(ax_2+b)^{-2}$.

7. Een huis heeft 9 vensters in den voorgevel; hoeveel teekens kan de bewoner een voorbijganger geven door één of meer vensters open te zetten?

8. Als M en N de som voorstellen van opv. m en n termen van een rekenkundige reeks, die beiden tot verschil hebben b en tot eersten term a, bewijs dan dat $\frac{N}{n}-\frac{M}{m}=(n-m)\frac{b}{2}$ is.

9. Men vraagt de verhouding $x:y:z$ als gegeven is:

$$\frac{z+2x}{3y}=\frac{x+y+z}{2(x+y)}=\frac{x+z}{2x+y}.$$

10. Deel $x^{3^n}-y^{3^n}$ door $x^{3^{n-1}}-y^{3^{n-1}}$.

11. De som van de n^e en de $2n^e$ term van een meetkundige reeks is k en de som van de $2n^e$ en de $3n^e$ term is l; men vraagt den eersten term en de reden.

12. Wanneer gegeven is:

$$\log 2\tfrac{1}{3}=d; \quad \log 0{,}00294=b-5; \quad \log \tfrac{3}{5}=c,$$

vraagt men daaruit $\log 0{,}4\acute{6}$ te bepalen.

13. Het getal 17 in drie geheele getallen te verdeelen, zoodanig, dat 5 × het eerste, 7 × het tweede en 4 × het derde samen 80 is.

14. Als α en β de wortels zijn van $ax^2+bx+c=0$, vorm dan een vergelijking, die tot wortels heeft $\frac{a\alpha+b}{a}$ en $\frac{a\beta+b}{a}$.

15. Los x op uit: $\frac{\sqrt[n]{(m+x^2)}}{m}+\frac{\sqrt[n]{(m+x^2)}}{x^2}=\sqrt[n]{x^2}$.

16. Bereken $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2 \text{ enz.}}}}}}$

17. Van welk getal is de volgende vorm de logarithme?

$$(x+y)\log(a+x)+\frac{m}{n}(\log 1-y\log x)-\{(-\log 4)+\tfrac{2}{3}\log x+\tfrac{1}{2}\log y\}.$$

18. Los x, y en z op uit:

$$\begin{cases}(a+c)\,x-(c-a)\,y=2bc.\\(b+c)\,z-(b-c)\,x=2ab.\\(a+b)\,y-(a-b)\,z=2ac.\end{cases}$$

19. Een vergelijking op te stellen, waarvan de wortels de vierkanten zijn van die van $mx^2+nx=p$.

20. Welke term in de ontwikkeling van $\left(3x^2-\frac{a}{3x^3}\right)^{10}$ is onafhankelijk van x?

21. Vereenvoudig: $\{16^{-3/4}-81^{-3/4}\}:\{16^{-1/4}+81^{-1/4}\}$ en $8^{4/3}+\sqrt[3]{2\,.\,4^{-5}}-\frac{\sqrt[7]{2}}{4^{-3/7}}-32^{-3/5}$.

22. Los x op uit $(a^{1/2}+x^{1/2})^{1/3}=(a^{1/3}+x^{1/3})^{1/2}$.

23. Bij het oplossen van de wederkeerige vergelijkingen stelt men $x+\frac{1}{x}=y$; voor $x^2+\frac{1}{x^2}$ vindt men y^2-2; voor $x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y$; bewijs, dat men vindt $x^n+\frac{1}{x^n}=$ $=\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)y-\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)$ en bereken hiermee $x^4+\frac{1}{x^4}$, $x^5+\frac{1}{x^5}$ en $x^6+\frac{1}{x^6}$.

24. Gegeven: $y=10^{\frac{1}{1-\log x}}$ en $z=10^{\frac{1}{1-\log y}}$; te bewijzen $x=10^{\frac{1}{1-\log z}}$.

25. Los x op uit: $\frac{\sqrt[p]{x+5}}{5}+\frac{\sqrt[p]{x+5}}{x}=\frac{\sqrt[p]{x}}{3}$.

Substitueer in het antwoord voor $p=13$ en bereken x met logarithmen.

26. De logarithmische vergelijking:

$$\frac{x^{\log 3x}}{(2x)^{\log 2x}} = 5 \text{ op te lossen.}$$

27. Hoe groot is een kapitaal, dat tegen 5 pct. rente, in twaalf jaarlijksche termijnen betaald wordt (met aflossing der samengestelde interest) als de eerste termijn *f* 1000 is en elke termijn $\frac{1}{10}$ der vorige grooter is dan die vorige?

28. Ontbind in factoren:

$$2x^2 - 9x + x\sqrt{2} + 7.$$

29. Iemand, die een schuld van *f* 6000, rentende 4 pct. 's jaars, samengestelde interest, te betalen heeft, wil kapitaal en interest afdoen in twaalf gelijke halfjaarlijksche termijnen; hoe groot moet de aflossing zijn?

De rente wordt na afloop van ieder halfjaar bij het kapitaal gevoegd.

30. Van welken vorm is de logarithme gelijk aan:

$$\tfrac{2}{3} + 1\tfrac{1}{3} \log a + \tfrac{2}{3} c \log b - 2 \log d?$$

31. Los op:

$$(x^2 + 6)\, 2\sqrt{5} - 11x\sqrt{(9 - 4\sqrt{5})} = 40 + 3x^2.$$

32. Herleid:

$$\left(\frac{a^3 b^{-1}}{x^{-2} y^4}\right)^{2/3} \times \left(\frac{a^{-1} x^3}{b^5 y^{-2}}\right)^{-5/6} \times \sqrt[3]{\left(\frac{a^{1 1/4} y^{-3 1/2}}{x^{1/4} b^{-3/4}}\right)^{-2}}.$$

33. Iemand leent *f* 20.000 onder voorwaarde, dat hij de hoofdsom en 3 % rente zal betalen met een annuïteit van *f* 1300. Na hoeveel jaar is de schuld gedelgd?

Men vindt $n + 1 > x > n$; hoe groot moet de annuïteit zijn precies verdeeld over $(n + 1)$ jaar, hoe groot over n jaar?

34. Los x op uit de vergelijking:

$$8^{\frac{x-1}{1 1/2}} + 32^{\frac{2x+1}{2 1/2}} = 16400.$$

35. Van een vierkantsvergelijking $x^2 + px + q = 0$ is gegeven: het verschil der wortels is a en hun quotient is b, $(x_1 - x_2 = a,\ \frac{x_1}{x_2} = b)$.

Hoe moeten a en b gekozen worden, opdat q negatief zij?

36. Bepaal de eenvoudigste gedaante der vierkantsvergelijking, waarvan de wortels zijn:

$$\sqrt{(7+\sqrt{13})}-\sqrt{(7-\sqrt{13})} \text{ en } 3-\sqrt{2}.$$

37. Bewijs, dat uit $a+\sqrt{b}=m+\sqrt{n}$ volgt $a=m$ en $b=n$. Waarbij wordt dat toegepast? Herleid $\sqrt{a+b\sqrt{c}}$ tot een tweeterm, zonder de bekende kunstgreep uit het 2e deel; gebruik de kunstgreep uit § 7 van dit deel.

38. Bereken x uit:

$$x=\sqrt[7,69325]{0,4921^{3,8214}}.$$

39. Iemand, die *f* 40000 bezit, krijgt na 5 jaar een erfenis van *f* 10000. Bij het einde van elk jaar betaalt hij *f* 900 voor zijn onderhoud. Na hoeveel jaar bezit hij *f* 60000, als samengestelde interest berekend wordt à 3 pct. 's jaars?

40. Vereenvoudig:

$$\frac{\sqrt[4]{(1764-720\sqrt{6})}.}{(3-\sqrt[3]{3})(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})}.$$

41. Een automobiel vertrekt uit A met een snelheid van 10 KM per uur en legt elk volgend uur $^1/_4$ KM meer af. Drie uren later vertrekt een tweede automobiel in dezelfde richting uit een plaats A, die $40^3/_4$ KM verder dan A in die richting ligt. Deze legt het eerste uur 7 KM af en elk volgend uur $^2/_3$ KM meer. Hoeveel uur na het vertrek van de eerste zal de eene de andere inhalen?

42. Bereken x uit:

$$x=\frac{0,264^5\sqrt[3]{-3,145^2}}{\sqrt[3425]{0,908^{416}}}$$

43. Los x op uit de vergelijking:

$$x^{\log^2 x-3\log x+2}=1.$$

44. Los x en y op uit:

$$2^{x+y+1}+2^{x+y-1}=80 \text{ en } (2x+3y)^{\log(x-y)}=1.$$

45. Welke waarden van x en y voldoen aan:

$$\frac{17}{\sqrt{(x+y)}}-\frac{7\sqrt{(x+y)}}{x}=\frac{10x}{\sqrt{(x+y)^3}} \text{ en } \sqrt{(x-y)}=y-1\,?$$

46. Een wielrijder gaat uit A naar B. Hij vertrekt 's morgens om 6 uur uit A. AB is $67\frac{1}{2}$ KM. In B aangekomen rust hij $2\frac{1}{4}$ uur. Op den terugweg heeft hij den wind mee en legt 3 KM per uur meer af. Hij komt om half vijf te A aan. Met welke snelheid vertrekt hij uit A?

47. Los x op uit:

$$2x^{\log x} - 3x^{2\log x} + 16 = 0.$$

48. Voor den algemeenen term van een reeks vind ik $t_n.\sqrt{5} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}$; het antwoord moet zijn:
$t_n = \frac{(-2)^n}{\sqrt{5}}\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{(1+\sqrt{5})^{n+1}} - \frac{1+\sqrt{5}}{(1-\sqrt{5})^{n+1}}\right\}$. Is mijn antwoord goed?

49. Verdrijf de wortelteekens uit den noemer van den vorm

$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt[3]{3}}{\sqrt{5}-\sqrt[3]{3}}.$$

50. A en B zijn $3\frac{1}{2}$ KM van elkaar verwijderd, gemeten langs een rivier, die 2 KM per uur stroomt. Een stoomboot gaat van A naar B en daarna van B naar A in 1 uur en 40 min.. Wat is de snelheid van de boot in stilstaand water?

51. Herleid:

$$\sqrt{\{3+\sqrt{3}+\sqrt{(11+6\sqrt{3})}\}} - \sqrt{\{3+\sqrt{3}-\sqrt{(11+6\sqrt{3})}\}}.$$

52. Van een meetkundige en een rekenkundige reeks elk van 6 termen, zijn de eerste termen gelijk; de tweede termen zijn ook gelijk. De derde term van de meetkundige reeks is gelijk aan de vijfde term der rekenkundige. De laatste term der meetk. reeks is 464 grooter dan de laatste term der rekenkundige. Welke zijn die reeksen?

53. Een credietbank leent een som van *f* 18800 uit, op voorwaarde, dat de schuldenaar hoofdsom en rente zal terugbetalen met 10 annuïteiten van *f* 2400. Welke rente rekent de bank?

54. Na hoeveel tijd is een kapitaal, dat tegen 5 % op samengestelden interest uitstaat, aangegroeid tot dezelfde som als een kapitaal van dubbele grootte, dat tegen 3 % uitstaat?

55. A, B en C hebben opv. *f* 8000, *f* 12000 en *f* 14000 op interest uitgezet. Het kapitaal van A brengt in 6 maanden *f* 10 meer op dan dat van B in 4 maanden, terwijl het kapitaal van C in 8 maanden *f* 120 meer opbrengt dan dat van A in 9 maanden. In één jaar bedraagt de interest der drie kapitalen *f* 1600. Tegen welke procenten staan die kapitalen uit?

56. Bepaal a in: $6x^2 - 7x\sqrt{3} - a - 2x + 4 = 0$, zoo bekend is, dat de wortels dezer vergelijking zich verhouden als $(10 - 2\sqrt{3}) : (9 - 3\sqrt{3})$.

57. Los x op uit:

$$\log \log x = \log\{10 - 2\log x\} + 1.$$

Het grondtal van het logarithmenstelsel is 2.

58. Van een meetk. reeks van 5 termen is de som $\frac{211}{16}$; de som van de omgekeerden der termen is $\frac{211}{81}$. Welke is die reeks?

59. Bereken:

$$x = \frac{(-0{,}23591)^6 \sqrt[3]{(-7{,}9326)}}{\sqrt[5]{(-0{,}059236)}}.$$

60. Een staaf bestaat uit zilver en koper en bevat 1845 gram meer zilver dan koper. Als er nog $^1/_3$ van het aanwezige zilver aan toegevoegd kon worden, zou het gehalte aan zilver 0,835 en dat aan koper 0,165 zijn. Bereken het gewicht en het gehalte der oorspronkelijke staaf.

61. Bereken x uit: $x^{-\log x} = 0{,}365 \times 1{,}243^{-2}$.

62. Herleid:

$$-1 + \sqrt{\left\{\frac{\sqrt[4]{a^3b} - \sqrt[4]{ab^3}}{\sqrt[4]{a^3b} + \sqrt[4]{ab^3}} + \frac{\sqrt[4]{a^3b} + \sqrt[4]{ab^3}}{\sqrt[4]{a^3b} - \sqrt[4]{ab^3}} + 2\sqrt{\frac{3a^2 + 10ab + 3b^2}{3a^2 - 2ab - b^2}}\right\}}.$$

63. Los x en y op uit:

$$2^{\log x} \,.\, 5^{\log 3xy} \,.\, 4^{\log \sqrt{y}} = 30^{\log 5}.$$

$$\log 2 \,.\, \log x - \log 3 \,.\, \log y = 1.$$

64. Zoek een rekenkundige reeks, waarbij een standvastige verhouding bestaat tusschen de som van de eerste x termen en de kx volgende termen, onverschillig, wat x is.

65. Onderzoek of het volgende in orde is:
Gegeven: x_1 en x_2 zijn de wortels van de v.k.v. $ax^2 + bx + c = 0$.
Te bew.: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1(x - x_2)$.
Bewijs:
Het gegeven beteekent $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$, $ax_2^2 + bx_2 + c = 0$; oplossing van a, b en c uit deze beide geeft $a = \frac{b}{-(x_1 + x_2)} = \frac{c}{x_1 x_2}$, waaruit volgt $b = -a(x_1 + x_2)$ en $c = ax_1x_2$; dus is $ax^2 + bx + c = ax^2 - ax(x_1 + x_2) + ax_1x_2 = a(x - x_1)(x - x_2)$.

66. Als $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ is en a, b en c vormen een rekenkundige reeks, dan vormen b, c en d een harmonische reeks. Bewijs.

67. Door de duinen loopt een weg van A naar B; een persoon bevindt zich in C op x KM afstand van den weg; door de duinen kan hij 2 KM per uur afleggen en langs den weg 5 KM. Hij loopt schuin op den weg aan en bereikt dien in D; hierbij is CD = DB en hij heeft in het geheel $3\frac{1}{2}$ uur werk om in D te komen. Liep hij in een richting loodrecht op den weg en volgde hij daarna den weg, dan had hij evenlang werk door de duinen als langs den weg. Hoever ligt C van den weg af?

68. Wat is u bekend van de coëfficiënten van $ax^3 + bx^2 + cx + d$, als gegeven is, dat deze vierterm deelbaar is door $x^2 + e$?

69. Onder welke voorwaarde heeft de vergelijking

$$\frac{l}{x-a} + \frac{m}{x-2a} + \frac{n}{x-3a} = 0 \text{ gelijke wortels?}$$

70. Van een reeks is gegeven $t_n = an^2 + bn + c$; p, q, r en s zijn vier opeenvolgende termen dier reeks; bewijs dat men heeft $p - s = 3(q - r)$.

71. Bereken: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$, als gegeven zijn de betrekkingen $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ en $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$.

72. De som van n termen van een rekenkundige reeks wordt voorgesteld door $2n - 7n^2$; bepaal den n^{en} term dier reeks.

73. Vind eenige stellen waarden, die voldoen aan de vergelijkingen $x^{2(x+y)} = y$ en $y^{x+y} = x^2$.

74. AB is een lijnsegment van een meter lengte; bepaal een punt P op AB zoodanig, dat $3AP^2 + 2PB^2$ een minimum is.

75. Van een reeks is gegeven $t_n = 3.2^{n-1} + 4n - 7$; gevraagd de waarde van $S_n = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n$.

76. Bepaal een homogene symmetrische functie van den tweeden graad in x, y en z, die gelijk wordt aan 1 voor $x = 0$, $y = 1$ en $z = -1$ en aan 2 voor $x = 0$, $y = 0$ en $z = 1$.

P. WIJDENES en Dr. D. D

REKENBOEK voor de Hooge

1e deel, 10e druk, ... gec. *f* 1,70. –
2e deel, 7e druk, ... gec. *f* 1,70. –

HANDELSREKENEN 3e dr., gec. *f* 1,70. ANTWOORDEN *f* 1,00.

LEERBOEK DER ALGEBRA.

1e deel, 8e dr., gec. *f* 1,90. — ANTWOORDEN, 3e dr. *f* 0,30.
2e deel, 7e dr., „ *f* 1,90. — ANTWOORDEN, 3e dr. *f* 0,75.
3e deel, 5e dr., „ *f* 1,90. — ANTWOORDEN, 2e dr. *f* 0,50.

VLAKKE MEETKUNDE.

Eerste deel, 6e druk, met gradenboog . . . . . . gecart. *f* 2,25.
Tweede deel, 5e druk, met formules . . . . „ *f* 2,25.

P. WIJDENES.

Algebra voor Middelbare Handelsdagscholen.

1e stukje, 5e druk, geb. *f* 1,75. 2e stukje, 3e dr. geb. *f* 1,75.
ANTWOORDEN I, 2e druk *f* 0,40, II, 2e druk *f* 1,20.

BEKNOPTE ALGEBRA.

1e stukje, 2e druk, gec. *f* 1,70. 2e stukje, 2e druk, gec. *f* 1,70.
ANTWOORDEN I *f* 0,75, II *f* 0,75.

BEKNOPTE MEETKUNDE.

1e stukje, 3e druk, gec. *f* 1,70. 2e stukje, 3e druk, gec. *f* 1,70.
OPLOSSINGEN *f* 1.—, voor leeraren gratis.

ALGEBRAÏSCHE VRAAGSTUKKEN.

1e deel, 5e druk, geb. *f* 2.40. 2e deel, 4e druk, geb. *f* 3,25.
ANTWOORDEN I *f* 0,75, II *f* 1,00.

ALGEBRA VOOR M. U. L. O.

1e stukje, 15e druk, geb. *f* 1.40. ANTWOORDEN, 4e druk *f* 0,50.
2e stukje, A, 6e druk, geb. *f* 1,50. ANTWOORDEN, 2e druk *f* 0,50.
2e stukje, B, EX.-UITGAVE, 6e dr. *f* 2,25. ANTWOORDEN . . *f* 0,75.

REKENBOEK VOOR M. U. L. O.

1e stukje, 4e druk, gec. *f* 1,60, 2e stukje, 3e druk, gec. *f* 1,60.
3e stukje, examen uitgave, 2e druk, gec. *f* 1,20.
UITWERKINGEN I *f* 1,50. II *f* 1,50. III *f* 1,—.
Vereenvoudigde uitgave B. I gec. *f* 1,40. II gec. *f* 1,40.

MEETKUNDE VOOR M.U.L.O.

1e stukje, 8e dr., geb. *f* 1,40. Werkschrift I, 5e dr., *f* 0,70, gec. *f* 0,90.
2e stukje, 4e dr., geb. *f* 1,50. „ II, 2e dr., *f* 0,80, gec. *f* 1,00.
Oplossingen, 2e dr., *f* 0,75.

UITGAVEN VAN P. NOORDHOFF TE GRONINGEN.